

H. de Morin

Les Appareils d'Intégration

Bibliothèque générale des Sciences

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
Gordon Bell

http://archive.org/details/lesappareilsdint05hdem

BIBLIOTHÈQUE GÉNÉRALE DES SCIENCES.

LES

APPAREILS D'INTÉGRATION

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
50271 Quai des Grands-Augustins, 55.

LES

APPAREILS D'INTÉGRATION

INTÉGRATEURS SIMPLES ET COMPOSÉS.

PLANIMÈTRES ;
INTÉGROMÈTRES ; INTÉGRAPHES ET COURBES INTÉGRALES ;
ANALYSE HARMONIQUE ET ANALYSEURS.

PAR

H. DE MORIN,

INGÉNIEUR CIVIL DES CONSTRUCTIONS NAVALES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

AVERTISSEMENT.

La présente Étude contient, avec leur théorie, la monographie des appareils d'intégration, c'est-à-dire de cette catégorie de machines à calcul destinées à effectuer les opérations qui se rencontrent dans les applications numériques du Calcul intégral.

Beaucoup de ces appareils ont déjà fait l'objet de descriptions dans des Revues scientifiques, Comptes rendus d'Académie, etc., ainsi que dans des Traités spéciaux, que nous avons consultés, et parmi lesquels nous citerons l'Ouvrage bien connu d'Abdank-Abakanowicz, le Calcul mécanique de M. l'ingénieur Jacob et le Catalogue de M. Walther von Dyck.

Nous avons également mis à profit d'utiles indications concernant certains appareils, dont l'étude fait partie des cours de l'École d'application du Génie maritime.

Enfin, d'intéressants documents nous ont été fournis par MM. Amsler-Laffon et Coradi, les constructeurs bien connus de Schaffhouse et de Zurich, auxquels nous adressons ici l'expression de nos remercîments.

H. de M.

6

LES

APPAREILS D'INTÉGRATION.

INTRODUCTION.

Il semble que le désir de simplifier les opérations auxquelles donnent lieu les applications du calcul ait de bonne heure sollicité l'ingéniosité des inventeurs, puisque l'usage des planchettes à calcul était déjà courant chez les Grecs et les Romains.

Le calcul numérique est en effet l'intermédiaire à l'aide duquel les données scientifiques prennent une réalité tangible ; sans lui, les théories les plus ingénieuses risquent de n'être jamais que des spéculations de l'esprit, capables de satisfaire seulement les aspirations d'un nombre relativement restreint d'initiés.

Le travail long et pénible qu'il nécessite a été l'origine de recherches nombreuses, en vue de créer des méthodes propres à en faciliter l'exécution. La plus célèbre est sans contredit celle que donnait il y a trois siècles le baron écossais Jean Néper, en imaginant les logarithmes et en rendant leur application pratique par la création de Tables.

Depuis, de nombreuses méthodes de simplification ont été proposées. Elles ont fait l'objet d'une étude fort inté-

ressante et très documentée due à M. d'Ocagne qui les a exposées dans son Ouvrage sur le *Calcul simplifié*.

Les procédés de calcul mécanique y tiennent une large part.

Créer une machine capable de fournir un résultat numérique par le jeu d'une combinaison purement mécanique, en réduisant au minimum le travail intellectuel de l'opérateur, est évidemment un problème fort séduisant; le rôle de celui-ci consiste alors simplement à fournir à la machine les données de la question, et à agir sur un mécanisme qui donne le résultat cherché par le seul jeu de ses organes.

Ce furent naturellement les opérations les plus simples et partant les plus usuelles de l'arithmétique qu'on chercha tout d'abord à effectuer mécaniquement. Il était réservé à Pascal et à Leibniz de résoudre ce problème, le premier en créant une machine à additionner, le second une machine à multiplier [1].

Actuellement l'usage de la machine à calcul sous toutes ses formes s'est considérablement développé, et le champ des applications s'étant de plus en plus élargi, on a construit des appareils capables non seulement d'effectuer les opérations arithmétiques, mais aussi de résoudre les questions de l'Algèbre et de l'Analyse.

On peut, suivant une classification généralement

---

[1] Il existe dans la collection du Conservatoire des Arts et Métiers plusieurs modèles de la machine de Pascal; celle de Leibniz, dont l'originale est conservée à la Bibliothèque royale de Hanovre, y est figurée par une série de photographies donnant des vues d'ensemble et le détail du mécanisme.

adoptée, ranger en trois catégories les appareils à calculer :

1° Les machines arithmétiques;
2° Les machines algébriques;
3° Les appareils d'intégration.

Les instruments de cette dernière catégorie, les seuls dont il sera question dans cet Ouvrage, ont pris une grande importance à mesure que se sont développées les études nécessitées par la technique de l'art de l'ingénieur, et par suite les applications de calcul intégral. On sait que la méthode généralement employée consiste alors à établir une ou plusieurs relations différentielles dépendant des conditions imposées par le problème, et à intégrer ensuite les relations ainsi obtenues.

Plus rarement, on peut se proposer de faire l'opération inverse, c'est-à-dire celle de la dérivation ; le calcul permet toujours d'obtenir facilement le résultat cherché, nous verrons d'ailleurs que la construction de dérivateurs ou différentiateurs n'est pas sans présenter de sérieuses difficultés de réalisation.

Le premier problème, de beaucoup le plus fréquent, conduit au contraire à des calculs généralement compliqués et toujours fastidieux par la longueur des opérations qu'ils nécessitent. Obtenir rapidement un résultat suffisamment exact, tel est le but des appareils appelés *intégrateurs*. Leur rôle est donc en définitive de donner la valeur numérique d'une relation différentielle.

Le problème, ainsi posé, offre un champ considérable, étant donnée la diversité des types de relations différen-

tielles qu'on est appelé à rencontrer dans les applications.

En fait le nombre des intégrateurs est aujourd'hui considérable. On les divise en deux catégories :

Les intégrateurs simples dont le but est de déterminer la valeur numérique des intégrales de la forme

$$y = \int f(x)\,dx.$$

Les intégrateurs composés qui intègrent les équations différentielles, c'est-à-dire qui permettent de déterminer la fonction y définie par des relations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Les appareils de la première catégorie peuvent se subdiviser eux-mêmes en plusieurs classes :

a. Les planimètres, donnant la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, c'est-à-dire permettant de déterminer l'aire d'un contour fermé.

b. Les intégromètres, donnant à la fois la valeur numérique de l'aire, du moment statique et du moment d'inertie d'une surface plane.

c. Les intégraphes, traçant directement une courbe représentative de la fonction

$$Y = \int f(x)\,dx.$$

d. Les analyseurs harmoniques, destinés à fournir la valeur numérique des termes d'une série de Fourier.

L'origine de tous ces appareils est relativement récente et ne remonte pas au delà du commencement du siècle dernier. Les premières recherches avaient pour but de simplifier les calculs nécessités par l'évaluation des surfaces; le problème présentait un intérêt tout spécial dans le cas des travaux auxquels donnèrent lieu les opérations de l'établissement du cadastre.

En 1827, Hoppikofer présentait un planimètre qui semble avoir été contemporain de plusieurs autres appareils du même genre, notablement perfectionnés dans la suite.

Parmi les inventeurs qui s'attachèrent spécialement à l'étude des intégrateurs, il faut citer en première ligne A. Amsler qui envisagea la question de l'intégration mécanique sous une forme générale, et réalisa la construction de nombreux appareils dont les plus connus sont : le planimètre polaire devenu d'un usage classique, et l'intégromètre donnant la valeur du moment statique et du moment d'inertie d'une surface plane ([1]). Amsler a également construit un planimètre servant à déterminer l'aire d'une surface sphérique, un appareil, le stéréographomètre, donnant l'aire d'un contour fermé dont on connaît la projection stéréographique, et un intégrateur composé.

Dans la suite, différents modèles d'intégrateurs furent successivement réalisés par M. Marcel Desprez en France, J. et W. Thomson, Helle-Shaw en Angleterre.

([1]) Amsler a publié ses travaux dans une brochure parue à Schaffhouse en 1856 et depuis longtemps épuisée : *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen und Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter.*

Vers 1878, Abdank-Abakanowicz en France a étudié spécialement la construction des intégraphes dont il a donné de nombreux modèles [1], et Boys, directeur de l'École royale des Mines de Londres, imaginait vers la même époque un appareil du même genre.

La construction des analyseurs harmoniques, nécessitée principalement par l'étude de l'Électrotechnique, semble avoir été plus particulièrement en honneur à l'étranger; Lord Kelvin, Scharp, Henrici, Yule en Angleterre, Boucherot en France, ont réalisé plusieurs appareils de cette classe.

Les intégrateurs composés, d'une construction compliquée et d'un caractère de généralité beaucoup plus restreint que les appareils précédents, sont à l'heure actuelle encore peu nombreux. Les principaux travaux tentés dans cet ordre d'idées sont ceux de W. Thomson en Angleterre et celui de M. Michel Pétrovitch présenté en 1897 à l'Académie des Sciences. Plus récemment, M. l'ingénieur général d'Artillerie navale Jacob a étudié des appareils destinés à l'intégration de certains types d'équations différentielles du premier ordre, et en outre un intégrateur permettant de résoudre sans calcul le problème du mouvement d'un point dans un milieu résistant, quelle que soit la nature du fluide constituant ce milieu.

Dans ce qui suit, nous examinerons principalement les appareils dont l'usage est le plus courant. En première

---

[1] Abdank-Abakanowicz a résumé ses travaux dans une brochure parue en 1886 : *Les intégraphes et la courbe intégrale.*

ligne se placent les planimètres et les intégromètres dont l'emploi simplifie considérablement les opérations qu'on a à effectuer dans les problèmes de résistance de matériaux, d'évaluation du travail des machines et tout spécialement, en architecture navale, dans les calculs de déplacement et de stabilité.

Nous étudierons ensuite les intégraphes, en rappelant quelques-unes des principales propriétés des courbes intégrales, et les analyseurs harmoniques qui, malgré l'intérêt que peut présenter leur emploi dans beaucoup d'applications, sont encore assez peu répandus dans la pratique.

Enfin nous indiquerons quelques-unes des solutions proposées relativement à la réalisation des intégrateurs composés.



CHAPITRE I.

LES PLANIMÈTRES.

Généralités.

Soit C une courbe fermée rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires et dont l'équation est

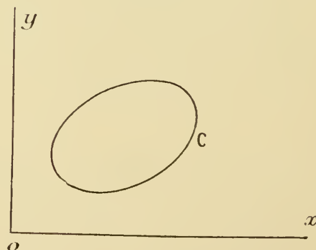
$$y = f(x).$$

On sait que l'aire de cette courbe est donnée par la valeur de l'intégrale

$$\int y\, dx,$$

étendue à la totalité du contour.

Fig. 1.



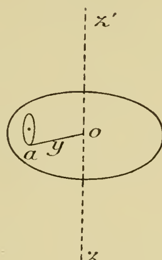
Si une roulette se déplace de telle sorte que l'arc élémentaire développé par sa circonférence soit constamment

égal ou proportionnel à $y\,dx$, la longueur totale de l'arc développé à la fin de l'opération permettra d'évaluer l'aire de la courbe donnée.

Il suffit, pour remplir ces conditions, que le développement du chemin parcouru soit proportionnel à dx dans un rapport constamment égal à y.

Si, par exemple, un disque tourne autour d'un axe zz' perpendiculaire à son plan d'un angle $d\theta$ proportionnel

Fig. 2.



à dx pendant qu'une roulette de rayon ρ se déplace suivant un diamètre de façon que $oa = y$, le développement élémentaire sera

$$\rho\, d\omega = y\, d\theta = \mathrm{K} y\, dx,$$

et le développement total $\rho\,\omega = \mathrm{K}\int y\,dx$ donne, par la connaissance de l'angle ω dont a tourné la roulette, la valeur de l'intégrale

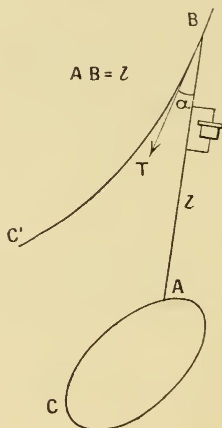
$$\int y\, dx.$$

On obtient le même résultat en remplaçant le disque par un cône de révolution tournant autour de son axe.

Ce procédé s'est présenté naturellement à l'esprit des premiers constructeurs qui l'ont appliqué directement dans l'établissement de leurs appareils. C'est sur ce principe qu'ont été construits les planimètres dits à *rotation*.

Au lieu de chercher à déterminer directement la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, Amsler a considéré deux courbes quelconques C, C' et démontré que, si une droite AB de longueur constante l se déplace de telle sorte que le point A décrive la courbe C en revenant à son point de

Fig. 3.



départ pendant que B se meut sur C', l'aire de la courbe C peut se mettre sous la forme

$$A = l \int ds \sin\alpha + K,$$

ds étant un élément de longueur d'arc de la courbe C', et K une constante qui peut être nulle.

Si alors une roulette est reliée à la tige AB et permet de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int ds \sin \alpha,$$

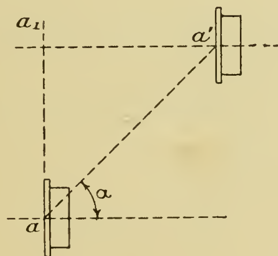
le problème sera entièrement résolu.

Ce principe, appelé *principe de la tige de longueur constante*, a été utilisé par Amsler dans la construction d'un nombre considérable de planimètres, qui eux-mêmes ont donné lieu dans la suite à de nombreuses variantes.

La partie essentielle de ces appareils, comme de la presque totalité des appareils d'intégration, est donc une roulette qui se déplace sur un plan ou une surface (généralement une sphère), en étant soumise à la fois à un mouvement de roulement et de glissement.

Roulette intégrante. — Considérons une roulette normale à un plan et se déplaçant à sa surface.

Fig. 4.



Les différents mouvements qu'elle peut prendre sont :

1° Un mouvement de roulement suivant son plan.

La longueur de l'arc développé est alors égale au chemin

parcouru et l'on a pour l'arc élémentaire

$$ds = \rho\, d\omega.$$

2° Un déplacement dans une direction faisant un angle α avec celle de son axe.

On peut le décomposer en un mouvement de roulement aa_1 parallèle au plan de la roulette, et un mouvement de translation $a_1 a'$ parallèle à son axe.

Le premier, seul, produit sa rotation et l'arc développé est

$$ds_1 = aa_1 = ds \sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\rho\, d\omega = ds \sin\alpha,$$

et, en intégrant,

$$\rho\omega = \int ds \sin\alpha.$$

L'angle dont a tourné la roulette est égal, à un facteur constant près, à l'intégrale

$$\int ds \sin\alpha.$$

3° Un déplacement dans la direction de son axe, il y a alors glissement sans rotation.

4° Enfin, un pivotement autour de la normale au plan passant par le point de contact a.

On voit donc que la relation

$$\rho\, d\omega = ds \sin\alpha$$

est vraie pour toutes les valeurs de α et permet de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int ds \sin\alpha.$$

Si, au lieu de se déplacer sur un plan, la roulette se meut sur une surface, les mêmes propriétés subsistent, pourvu que le plan de la roulette reste normal à la surface : On considère alors les déplacements infiniment petits du point de contact de la roulette dans le plan tangent à la surface en ce point.

Les planimètres construits d'après le principe de la tige de longueur constante sont de beaucoup les plus nombreux et les plus employés. Le plus simple est le planimètre polaire que nous étudierons tout d'abord, car sa théorie a servi de point de départ à l'établissement de tous les appareils similaires.

Planimètres à tige de longueur constante.

Théorie.

Considérons deux courbes C, C′ et une droite ADB de longueur constante dont les points A et D sont assujettis à se mouvoir respectivement sur C et C′. En B est fixée une roulette intégrante dont l'axe coïncide avec AB. Quand la droite ADB se déplace, le point D décrivant la courbe C′, la roulette se meut sur une courbe Γ.

Posons

$$\text{AD} = l, \qquad \text{BD} = a, \qquad \text{DD}' = ds, \qquad \text{BB}' = ds',$$

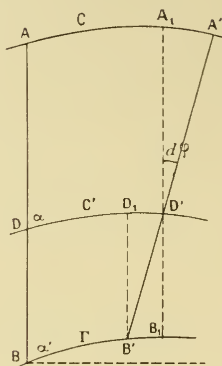
et désignons par α, α' les angles que fait AB avec les courbes C′ et Γ aux points D et B.

L'aire élémentaire AD A′D′ a pour valeur

$$(1) \qquad d\text{A} = l\,ds\sin\alpha + \frac{l^2}{2}\,d\varphi.$$

Évaluons ds en fonction de ds'; pour cela il suffit de projeter sur une perpendiculaire à AB le contour BDD′B′B; on a, en remplaçant les arcs DD′, BB′ par leurs cordes, et

Fig. 5.



la projection de B′D′ par l'arc de cercle de centre D′ et de rayon a, ce qui revient à négliger des infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$ds \sin\alpha = ds' \sin\alpha' + a\, d\varphi.$$

Transportant dans (1), il vient

$$dA = l\, ds' \sin\alpha' + \left(al + \frac{l^2}{2}\right) d\varphi,$$

et, en intégrant,

$$A = l \int ds' \sin\alpha' + \left(al + \frac{l^2}{2}\right)\varphi + \text{const.}$$

D'après ce que nous savons des propriétés de la roulette intégrante, $\int ds' \sin\alpha'$ représente la longueur de l'arc déve-

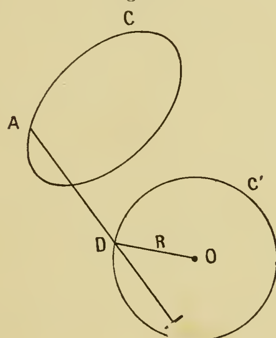
loppé par un point quelconque de la circonférence de la roulette, c'est-à-dire $\rho\omega$: on a donc finalement

$$A = l\rho\omega + \left(al + \frac{l^2}{2}\right)\varphi + \text{const.}$$

La courbe C′, au lieu d'être quelconque, peut être un cercle de centre O; c'est ce qu'on réalise pratiquement en articulant au point D la droite AB avec une seconde droite de longueur R et mobile autour du point O, qui est appelé *le pôle* (*fig.* 6).

Si alors on décrit une courbe fermée C avec une pointe fixée en A et si le pôle est extérieur à cette courbe, l'angle φ reprend la même valeur quand A est revenu à son

Fig. 6.



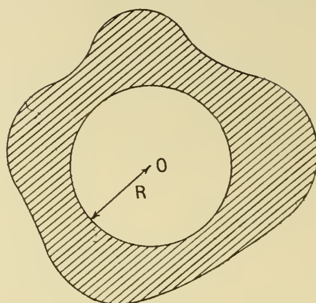
point de départ; dans ce cas, $\varphi = 0$. Les aires autres que l'aire de la courbe considérée étant balayées deux fois et en sens inverse, on a finalement

$$A = l\rho\omega,$$

et l'angle ω dont a tourné la roulette donne la valeur de A.

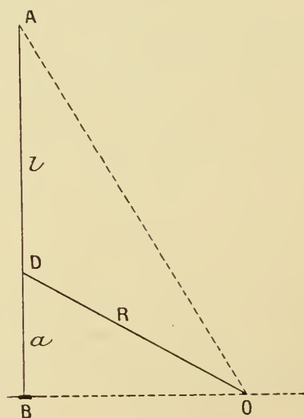
Si maintenant (*fig.* 7) le pôle est intérieur à la courbe C décrite par le point A, φ varie de o à 2π; de plus l'aire

Fig. 7.



évaluée précédemment étant comprise entre la courbe et la circonférence du cercle polaire, il faut, pour avoir l'aire

Fig. 8.



totale de la courbe C, ajouter celle de ce cercle, c'est-à-dire πR^2.

On a donc finalement

$$A = l\rho\omega + 2\pi\left(al + \frac{l^2}{2}\right) + \pi R^2,$$

$$A = l\rho\omega + \pi(R^2 + 2al + l^2).$$

La quantité $\pi(R^2 + 2al + l^2)$ représente la surface d'un cercle qui n'est autre que celui de rayon OA correspondant au cas où le plan de la roulette vient passer par le pôle. Pour cette position particulière, on a en effet (*fig.* 8)

$$\overline{OA}^2 = R^2 + 2al + l^2.$$

Si le point A décrit la circonférence de ce cercle, la roulette se déplace normalement à son plan, son centre décrivant le cercle de rayon OB; elle ne tourne donc pas. On a alors

$$\omega = 0, \qquad \varphi = 2\pi,$$

et, pour la valeur de l'aire,

$$A = \pi(R^2 + 2al + l^2).$$

Autre démonstration. — Soient deux courbes quelconques C, C' et AB une tige de longueur constante s'appuyant en A et D sur ces deux courbes; en B est fixée une roulette intégrante dont l'axe est dans le prolongement de la tige.

Soit I la position du centre instantané de rotation.

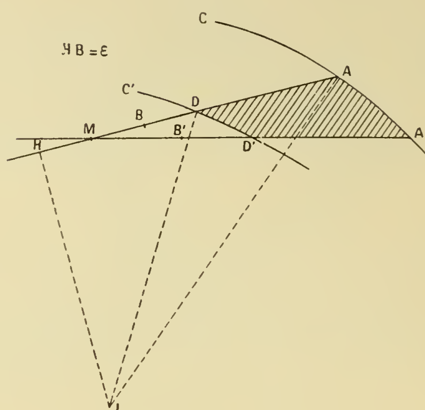
Le déplacement élémentaire de la tige, de AD en A'D', peut être considéré comme produit par sa rotation d'un angle infiniment petit $d\varphi$ autour de I.

On a alors

$$dA = \text{aire } AA'D'D = \text{aire } MAA' - \text{aire } MDD',$$

et en assimilant ces surfaces à des triangles infiniment petits, ce qui revient à remplacer l'arc par sa corde, c'est-

Fig. 9.



à-dire à négliger à la limite des infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\text{aire } \mathrm{MAA'} = \mathrm{MA'}\,\frac{\mathrm{MA}}{2}\sin d\varphi$$

$$= \frac{(l+a+\varepsilon)(l+a+\varepsilon-\mathrm{MH})}{2}\sin d\varphi \quad (^1).$$

MH est un infiniment petit du premier ordre; son produit par $\sin d\varphi$ sera du deuxième ordre, par conséquent négligeable.

---

(1) MA' est égal en effet à $\mathrm{A'D'} + \mathrm{B'D'} + \mathrm{MB'} = l + a + \mathrm{MB'}$, et MB' différant de ε d'une quantité infiniment petite, négligeable puisqu'elle est multipliée par $\sin d\varphi$, on a bien

$$\mathrm{MA'} = l + a + \varepsilon.$$

On a donc

$$\text{aire MAA}' = \frac{(l+a+\varepsilon)^2}{2}\sin d\varphi;$$

de même

$$\text{aire MDD}' = \frac{(a+\varepsilon)^2}{2}\sin d\varphi,$$

et développant $\sin d\varphi$ en série, on a pour $d\text{A}$

$$d\text{A} = \left[\frac{(l+a+\varepsilon)^2}{2} - \frac{(a+\varepsilon)^2}{2}\right]\left(d\varphi - \frac{d\varphi^3}{3} + \ldots\right),$$

ou, en négligeant $d\varphi^3$ ... infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$d\text{A} = \left(\frac{l^2}{2} + al\right)d\varphi + l\varepsilon\, d\varphi.$$

Or $\varepsilon\, d\varphi$ est l'arc infiniment petit qui représente le chemin développé par la circonférence de la roulette, c'est-à-dire $\rho\, d\omega$.

On a donc finalement

$$d\text{A} = \left(\frac{l^2}{2} + al\right)d\varphi + l\rho\, d\omega,$$

et, en intégrant,

$$\text{A} = l\rho\omega + \left(\frac{l^2}{2} + al\right)\varphi + \text{const.}$$

La courbe C′ est la directrice ; on voit que la démonstration précédente ne suppose aucune condition spéciale sur la nature de cette courbe.

Supposons que la courbe C soit fermée et qu'on veuille évaluer son aire. Si C ne contient à son intérieur aucun point de la courbe C′ et si, lorsque A a fait un tour complet, D est revenu à sa position initiale sans avoir par-

couru complètement C′ quand celle-ci est fermée, φ a repris alors la même valeur.

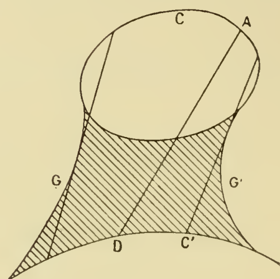
On a

$$A = l\rho\omega,$$

et cette valeur de A représente l'aire de C.

En effet la droite AD (*fig.* 10) a balayé la surface comprise

Fig. 10.



à l'intérieur de la courbe C, et en plus la surface limitée à C, C′ et aux deux courbes G, G′, enveloppes des positions successives de AD; mais cette dernière surface est parcourue deux fois et en sens inverse : finalement il ne reste donc que l'aire de la courbe C.

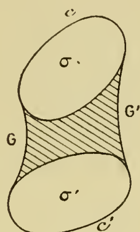
Supposons maintenant que le point A décrive la courbe C comme précédemment, mais que C′ étant fermée, le point D la parcourt entièrement; quand la tige AD est revenue à sa position primitive, φ a varié de 2π, et l'on a pour la valeur de A

$$A = l\rho\omega + \pi(l^2 + 2al).$$

Si la courbe c' est extérieure à c (*fig.* 11), l'aire A représente la somme des aires de ces deux courbes. La partie

hachurée comprise entre c, c', G, G' est parcourue deux fois et en sens inverse ; sa valeur ne figure donc pas dans A.

Fig. 11.

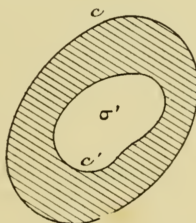


En désignant par σ, σ' les aires de c et c', on a donc

$$A = l\rho\omega + \pi(l^2 + 2al) = \sigma + \sigma'.$$

Si c' est intérieure à c (*fig.* 12), la surface balayée par AD est celle qui est comprise entre ces deux courbes.

Fig. 12.



On a alors

$$A = l\rho\omega + \pi(l^2 + 2al) = \sigma - \sigma'.$$

D'une façon générale, si les points A et D ont fait respectivement un tour complet sur c et c', quand la droite AD est revenue à sa position primitive, on a, suivant le sens

dans lequel ces courbes ont été parcourues,

$$A = l\rho\omega + \pi(l^2 + 2al) = \pm\sigma' \pm \sigma.$$

Remarque. — L'égalité $\varepsilon\, d\varphi = \rho\, d\omega$, dans laquelle ε représente la distance du point de contact de la roulette au point H, c'est-à-dire au point où la tige touche son enveloppe, montre que, pour un déplacement élémentaire $d\varphi$, $d\omega$ sera nul en même temps que ε, c'est-à-dire quand le plan de la roulette passe par le centre instantané de rotation : chaque fois que cette condition particulière se produit, la roulette pivote donc autour de son point de contact sans tourner.

Position de la roulette. — Nous avons supposé, dans la théorie précédente, que l'axe de la roulette coïncidait avec celui du bras moteur. En réalité, pour des raisons de construction, il n'en est pas ainsi ; mais il est facile de voir que les conclusions précédentes subsistent, si la roulette est reportée latéralement, pourvu que son axe reste rigoureusement parallèle à celui de la tige motrice.

En effet, soient Δ la position de la tige motrice, B celle de la roulette, I celle du centre instantané de rotation.

Quand l'ensemble a effectué autour de I une rotation élémentaire $d\varphi$, la roulette est venue en B' et a parcouru l'arc élémentaire

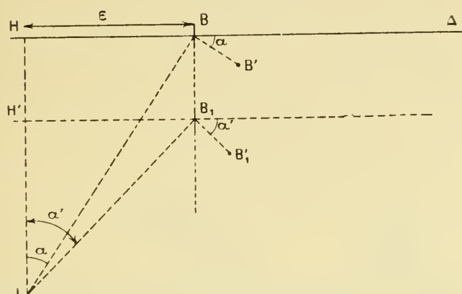
$$BB' = BI\, d\varphi.$$

Son développement, projection de cet arc sur son plan, est

$$BI\, d\varphi \sin\alpha = BH\, d\varphi = \varepsilon\, d\varphi.$$

Supposons maintenant la roulette placée en B_1 sur une perpendiculaire en B au bras moteur et de telle sorte que son axe reste parallèle à la direction $H\Delta$.

Fig. 13.



L'arc parcouru pendant la rotation $d\varphi$ est alors

$$B_1 B'_1 = B_1 I \, d\varphi$$

et le développement correspondant de la roulette

$$B_1 I \, d\varphi \sin \alpha' = B_1 H' \, d\varphi = \varepsilon \, d\varphi,$$

quantité égale à celle trouvée dans le premier cas.

DISPOSITIONS PRATIQUES DES PLANIMÈTRES.

Dans la théorie du planimètre, nous n'avons fait aucune hypothèse spéciale sur la nature de la directrice C'. Pratiquement, les courbes les plus simples à employer dans la construction des appareils sont évidemment la ligne droite et le cercle. Nous avons déjà vu que dans ce dernier cas il suffisait de relier la tige de longueur constante à une seconde tige, mobile autour d'un point fixe.

Nous distinguerons donc parmi les appareils utilisant le principe de la droite de longueur constante :

1° Les planimètres polaires ayant pour directrice une circonférence de cercle.

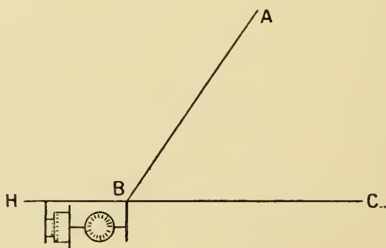
2° Les planimètres linéaires dans lesquels la directrice est une ligne droite.

3° Le planimètre de Prytz où la directrice est quelconque mais astreinte à être tangente à la droite de longueur constante, et le planimètre de Petersen dans lequel cette droite reste parallèle à une direction fixe.

PLANIMÈTRES POLAIRES.

Planimètre polaire d'Amsler. — C'est le premier appareil imaginé par Amsler en 1854; il est remarquable par sa grande simplicité et la facilité de son maniement. Depuis sa découverte, il n'a subi que des perfectionnements de détails.

Fig. 14.

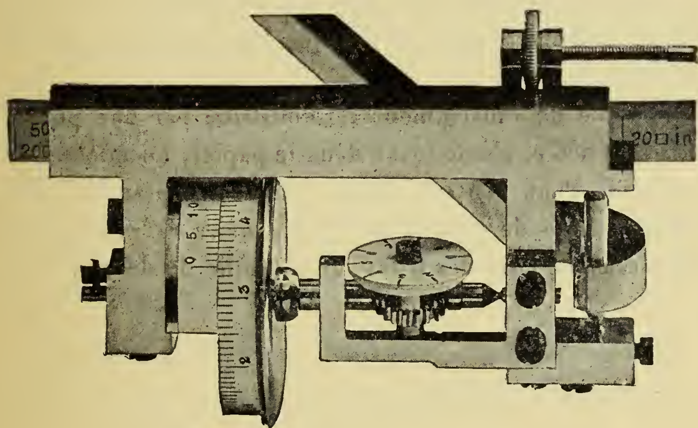


Il se compose (*fig.* 14) de deux tiges articulées AB, BC. La tige AB (bras polaire) pivote autour du point A; la

tige BC (bras moteur) porte à son extrémité C une pointe (traçoir) avec laquelle on suit le contour fermé dont on veut évaluer l'aire. Cette branche se prolonge par une partie BH destinée à recevoir la monture de la roulette intégrante et de l'appareil compteur.

Cette partie, la plus délicate de l'instrument, comprend (*fig.* 15) la roulette, en acier durci, à rebords saillants. Elle

Fig. 15.



est montée sur un axe dont les extrémités, terminées en pointe, s'engagent dans deux coussinets portés par la monture. Cet axe, par une transmission de vis tangente, fait tourner un petit pignon à axe vertical dont les divisions se déplacent devant un repère fixe.

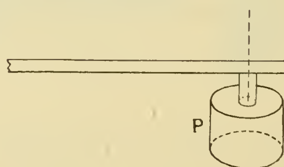
Enfin, un vernier fixe est placé sur la monture et permet d'apprécier les dixièmes de division. La roulette est divisée en 100 parties égales par des traits gravés sur cel-

luloïde blanc, et l'appareil est construit de telle sorte que le petit pignon tourne d'une division quand la roulette intégrante a fait un tour complet autour de son axe. Le petit pignon donne le premier chiffre du résultat, la roulette les chiffres suivants, et le vernier les fractions. La graduation varie d'ailleurs avec les différents modèles, et une instruction jointe à chaque appareil indique les unités à employer et la façon dont les lectures doivent être faites.

Cette disposition de l'appareil enregistreur est celle qu'on rencontre dans la presque totalité des appareils d'intégration.

Le pôle de l'instrument est constitué par une pointe sèche en acier, s'enfonçant dans le papier, ou mieux par un poids P au centre duquel se trouve une articulation servant d'axe de rotation au bras polaire (*fig.* 16). On évite ainsi de faire des trous sur la feuille du dessin.

Fig. 16.



Les deux bras sont reliés par une articulation à genouillère construite de façon à éviter les ballottements.

Le traçoir est une simple pointe d'acier dont la tête, formant poignée, est destinée à faciliter le parcours de la courbe. La maison Coradi emploie la disposition suivante : Une petite poignée est mobile autour de l'axe de

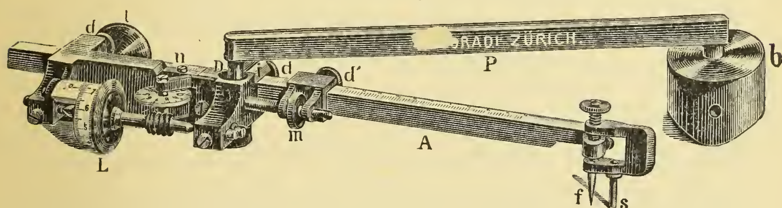
la pointe et porte un support *s* reposant sur la feuille du dessin et réglable de telle sorte que la pointe du traçoir affleure le contour de la courbe sans la toucher. Le traçoir peut d'ailleurs, par une légère pression, être abaissé s'il est nécessaire de marquer des points de repère sur la courbe.

Pour mesurer l'aire d'une surface, on place le pôle de telle sorte que le traçoir puisse parcourir tout le contour; puis, ayant noté le nombre indiqué par l'appareil enregistreur, on parcourt la courbe aussi exactement que possible dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, et, une fois revenu au point de départ, on note de nouveau les indications de la roulette. Si alors le pôle est extérieur à la courbe, la différence des deux lectures donne la valeur de l'aire.

Si le pôle a été pris intérieurement à la courbe, il faut, d'après ce que nous savons, ajouter une constante qui est indiquée pour chaque instrument.

Planimètre à compensation. — C'est un planimètre polaire disposé de façon à faire disparaître l'erreur pro-

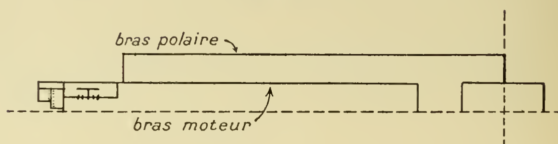
Fig. 17.



venant d'un défaut de parallélisme, toujours possible, de l'axe de la roulette et de celui du bras moteur.

A cet effet, l'appareil (*fig.* 17 et 18), est construit de telle sorte que le bras moteur puisse passer sous le bras polaire, et être ainsi placé soit à droite, soit à gauche de

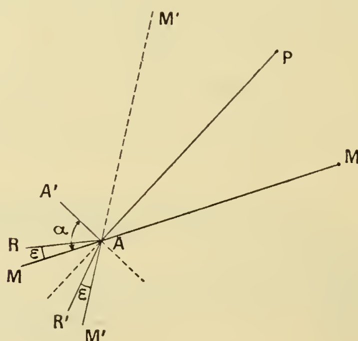
Fig. 18.



celui-ci. En faisant deux opérations dans ces conditions, et en prenant la moyenne des résultats, il y a sensiblement compensation de l'erreur.

Soient, en effet (*fig.* 19), PA le bras polaire, AM la

Fig. 19.



direction du bras moteur, AR celle de l'axe de la roulette faisant avec ce dernier l'angle ε.

AA' étant un élément de la directrice, la roulette enre-

gistre l'intégrale

$$\int ds \sin(\alpha - \varepsilon),$$

$$\int ds \sin(\alpha - \varepsilon) = \cos\varepsilon \int ds \sin\alpha - \sin\varepsilon \int ds \cos\alpha.$$

Pour une position AM′ du bras moteur, symétrique de AM par rapport à PA, on aura, pour la valeur de l'intégrale enregistrée par la roulette,

$$\int ds \sin \mathrm{A'AR'} = \int ds \sin[\pi - (\alpha + \varepsilon)]$$

ou

$$\int ds \sin(\alpha + \varepsilon) = \cos\varepsilon \int ds \sin\alpha + \sin\varepsilon \int ds \cos\alpha.$$

La moyenne des deux résultats est donc

$$\mathrm{A}_1 = \cos\varepsilon \int ds \sin\alpha,$$

et la différence avec le résultat cherché

$$\mathrm{A} - \mathrm{A}_1 = \int ds \sin\alpha - \cos\varepsilon \int ds \sin\alpha,$$

$$\mathrm{A} - \mathrm{A}_1 = \int ds \sin\alpha(1 - \cos\varepsilon) = \int ds \sin\alpha\left(1 - 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots\right).$$

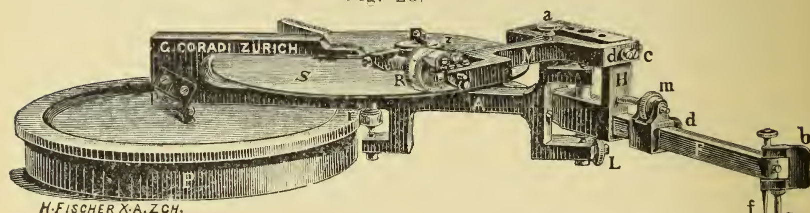
Cette différence est donc de l'ordre de ε^2, et par suite négligeable, ε étant toujours très petit.

Planimètre à disque. — Dans le planimètre polaire que nous venons de décrire, la roulette repose directement sur la feuille de dessin et est par conséquent soumise aux inégalités de celle-ci, surtout si l'on a affaire à de vieux plans pliés. On évite cet inconvénient dans le planimètre à disque en faisant reposer la roulette inté-

grante sur un plateau mobile autour d'un axe vertical passant par son centre et entraîné avec le bras polaire. La précision est en outre augmentée, le développement de la roulette étant multiplié dans un rapport connu.

L'appareil comprend (*fig.* 20) un plateau circulaire P

Fig. 20.



sur le centre duquel repose le bras polaire A par l'intermédiaire d'une articulation sphérique. Ce bras supporte le disque S qui est solidaire d'un petit pignon r; celui-ci, en roulant sur une couronne dentée portée par P, entraîne la rotation de S autour de leur axe commun O'. A l'extrémité du bras polaire est articulée la tige motrice F qui est solidaire d'un cadre portant la roulette intégrante. L'axe de cette dernière est, par construction, parallèle à celui de la tige motrice.

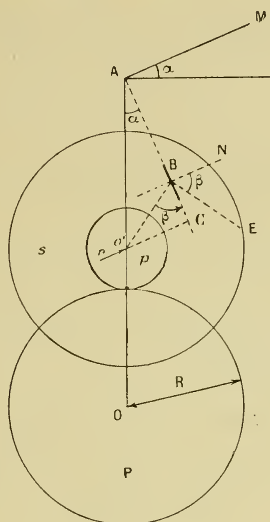
Désignons (*fig.* 21) par L la longueur AO du bras polaire, et soit ds la longueur de l'élément de courbe décrit par le point A (cercle polaire); pour une rotation $d\theta$ autour de O, on a $ds = \mathrm{L}\,d\theta$ et le plateau S dans ce mouvement a tourné autour de O' d'un angle $d\gamma$, tel que

$$d\gamma = \frac{\mathrm{R}\,d\theta}{r},$$

r étant le rayon du petit pignon.

Le déplacement élémentaire du planimètre peut être ramené à une rotation $d\theta$ du bras polaire autour de O,

Fig. 21.



suivie d'une rotation $(d\varphi - d\theta)$ de la tige motrice autour du point A; or, par construction, le plan de la roulette passe par le point A; pendant cette seconde rotation, la roulette se déplacera donc tangentiellement à son axe BN et ne tournera pas.

La rotation de la roulette sur elle-même est donc produite par le seul déplacement $d\theta$ de l'ensemble autour de O.

Le point de contact B de la roulette décrit dans cette rotation un chemin $O'B\, d\gamma$ et le développement correspondant est

$$O'B\, d\gamma \sin\beta.$$

Or

$$O'B \sin\beta = O'C = O'A \sin\alpha = [L - (R + r)] \sin\alpha,$$

et, remplaçant $d\gamma$ et $d\theta$ par leurs valeurs,

$$O'B\, d\gamma \sin\beta = [L - (R + r)] \frac{R}{r} d\theta \sin\alpha$$

$$= [L - (R + r)] \frac{R}{rL} ds \sin\alpha;$$

par conséquent, on a pour la valeur du développement de la roulette

$$\rho\, d\omega = \left(1 - \frac{R + r}{L}\right) \frac{R}{r} ds \sin\alpha,$$

et, transportant cette valeur de $ds \sin\alpha$ dans la formule générale des planimètres,

$$dA = l\, ds \sin\alpha + \frac{l^2}{2} d\varphi,$$

$$dA = l\rho \frac{d\omega}{\frac{R}{r}\left(1 - \frac{R + r}{L}\right)} + \frac{l^2}{2} d\varphi,$$

d'où, en intégrant,

$$A = l\rho \frac{\omega}{\frac{R}{r}\left(1 - \frac{R + r}{L}\right)} + \frac{l^2}{2} \varphi + \text{const.}$$

Comme précédemment, il y a deux cas à distinguer :

1° Si le pôle est extérieur à la courbe, φ reprend la même valeur, quand le traçoir a décrit tout le contour de la courbe. On a alors

$$A = l\rho \frac{\omega}{\frac{R}{r}\left(1 - \frac{R + r}{L}\right)};$$

2° Si le pôle est intérieur à la courbe, φ varie de o

à 2π, et la surface du cercle polaire n'ayant pas été balayée par le bras moteur, il faut ajouter son aire πL^2, ce qui donne pour la valeur de A

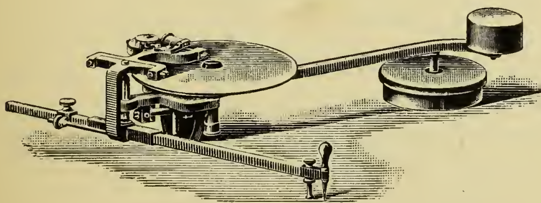
$$A = l\rho \frac{\omega}{\frac{R}{r}\left(1 - \frac{R+r}{L}\right)} + \pi(L^2 + l^2);$$

$\pi(L^2 + l^2)$ représente la surface du cercle de base. Si le traçoir décrit sa circonférence, le plan de la roulette passe par le pôle, et celle-ci ne tourne pas. Si l'on compare l'expression du rayon de ce cercle dans le cas du planimètre à disque et dans celui du planimètre polaire d'Amsler, où sa valeur est $\sqrt{L^2 + l^2 + 2al}$, on voit que dans le premier le terme $2al$ a disparu, puisque, le plan de la roulette passant constamment par A, a est nul. Cette disposition est favorable aux réductions de glissement.

L'appareil que nous venons de décrire est construit par la maison Coradi.

Dans d'autres modèles (*fig.* 22), on a conservé le dispo-

Fig. 22.



sitif adopté par Amsler lui-même. La couronne dentée du plateau polaire est supprimée. Le bras polaire porte alors,

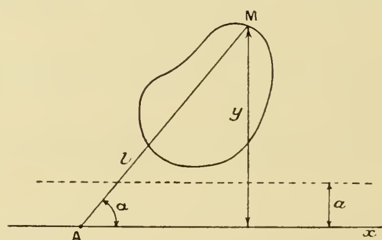
près de son articulation avec le bras moteur, un galet conique roulant sur la feuille de dessin quand l'appareil tourne autour du pôle. Ce galet produit la rotation du plateau S par un système d'engrenage entraînant un petit pignon fixé sur l'axe de ce plateau. Le contact de ce dernier avec la roulette intégrante est assuré par un contrepoids. Le principe et le fonctionnement de l'instrument sont les mêmes que dans le cas précédent.

PLANIMÈTRES LINÉAIRES.

Nous avons vu que dans ces planimètres, la courbe directrice n'est plus un cercle, mais une ligne droite.

Les instruments de cette catégorie seront constitués par

Fig. 23.



un chariot se déplaçant parallèlement à la directrice, et par une tige de longueur constante portant à une de ses extrémités un traçoir et articulée à l'autre en un point du chariot.

Reprenons la formule des planimètres

$$dA = l\,ds \sin\alpha + \frac{l^2}{2}\,d\varphi,$$

et supposons que le point A décrive l'axe des x; on a à chaque instant

$$ds = dx, \qquad y = l \sin \alpha,$$

donc

$$dA = y\,dx + \frac{l^2}{2}\,d\varphi,$$

et, pour un contour fermé,

$$A = l \int ds \sin \alpha = \int y\,dx.$$

Si le point A, au lieu de décrire l'axe ox, se déplace sur une droite qui lui soit parallèle, on a

$$l \sin \alpha = y \pm a,$$

$$dA = (y \pm a)\,dx + \frac{l^2}{2}\,d\varphi,$$

et, lorsqu'on est revenu au point de départ,

$$A = \int y\,dx,$$

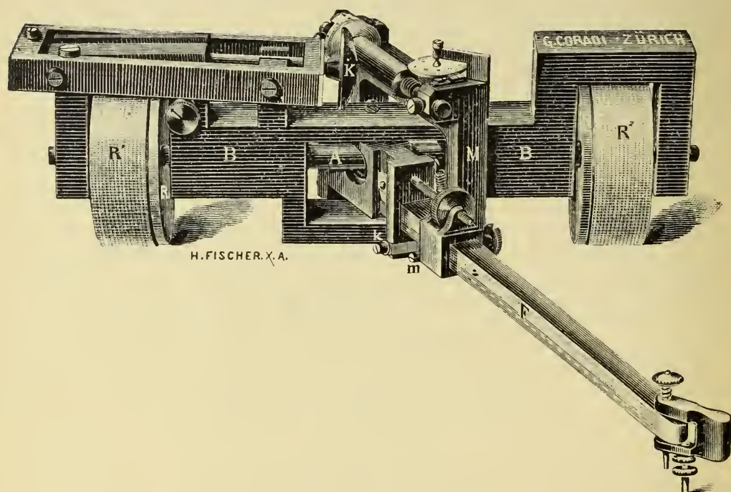
$\int a\,dx$ étant nul, puisque x reprend la même valeur.

Planimètre roulant à sphère. — Ce planimètre, représenté dans son ensemble (*fig.* 24), se compose d'un chariot B reposant sur deux rouleaux R', R', montés sur le même axe. Leurs jantes sont pourvues de stries, de telle sorte que l'appareil se déplace constamment dans la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux.

L'un d'eux porte une denture extérieure en retrait sur la jante, engrenant avec un petit pignon fixé sur l'axe portant le segment de sphère K.

Le bras moteur FM est mobile dans un cadre pratiqué dans la traverse formant la partie principale du chariot.

Fig. 24.



Un cadre M fixé au bras porte à sa partie supérieure le cylindre qui reste constamment tangent à la sphère et commande d'autre part l'appareil enregistreur.

Il résulte des dispositions précédentes que, si l'on désigne (*fig.* 25 et 26) par r le rayon du pignon p, par a celui de la sphère et par $d\gamma$ la rotation autour de son axe, lorsque l'ensemble a parcouru un chemin

$$ds = dx = \text{R}\, d\theta,$$

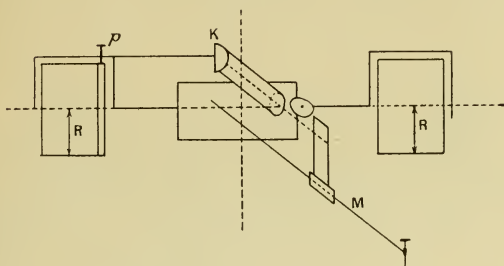
le segment de sphère a tourné autour de son axe de $d\gamma$, tel que

$$d\gamma = \frac{\text{R}}{r}\, d\theta.$$

Or, dans cette rotation, le point de contact t du cylindre et de la sphère a subi, sur la circonférence du petit cercle tt', un déplacement élémentaire égal à

$$a \sin\alpha \, d\gamma.$$

Fig. 25.



Le cylindre entraîné par la sphère a tourné de $d\omega$; et, s'il n'y a pas eu glissement, on a

$$\rho \, d\omega = a \sin\alpha \, d\gamma,$$

$$\rho \, d\omega = a \sin\alpha \frac{R}{r} d\theta = \frac{a}{r} ds \sin\alpha.$$

Transportant la valeur de $ds \sin\alpha$ dans la formule des planimètres, on a

$$dA = \rho l \frac{r}{a} d\omega + \frac{l^2}{2} d\varphi,$$

d'où

$$A = \rho l \frac{r}{a} \omega + \frac{l^2}{2} \varphi + \text{const.},$$

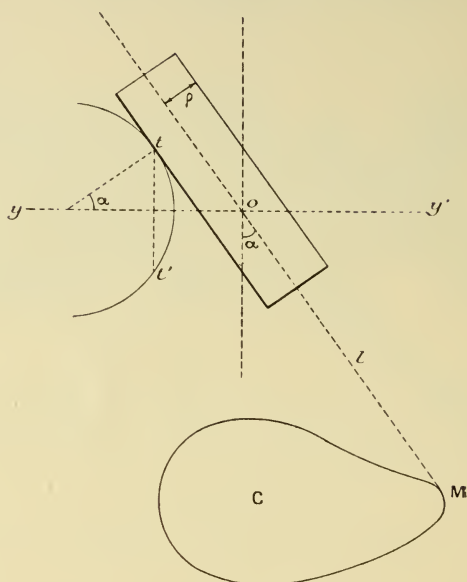
et pour un contour fermé, φ reprenant la même valeur,

$$A = \rho l \frac{r}{a} \omega.$$

Ce planimètre présente, par rapport aux appareils pré-

cédents, l'avantage d'avoir des lignes de glissement notablement réduites.

Fig. 26.



Il n'y a glissement que dans deux cas :

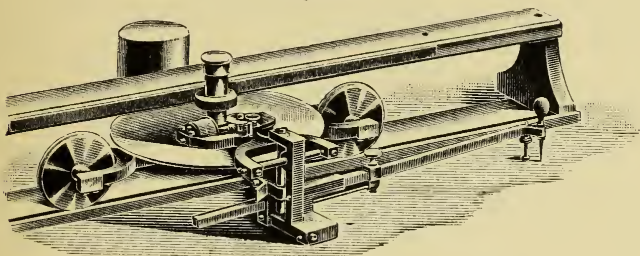
1° Si l'on fait parcourir au traçoir une circonférence de rayon l, les rouleaux ne se déplaçant pas, le cylindre enregistreur ne tourne pas autour de son axe, mais il pivote autour du point o de l'axe de la sphère ; ce point s'éloignant du centre de cette sphère, il se produit un léger glissement et le cadre du cylindre se soulève légèrement.

2° Lorsque le bras moteur est normal à l'axe des rouleaux, si l'axe du cylindre et celui de la sphère ne se

rencontrent pas exactement et sont à une distance d, il se produit un glissement sur la circonférence du petit cercle de rayon d.

Planimètre linéaire à disque tournant. — Comme dans le planimètre polaire à disque, la roulette intégrante

Fig. 27.



est entraînée par la rotation d'un plateau sur lequel elle repose directement et qui tourne autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre.

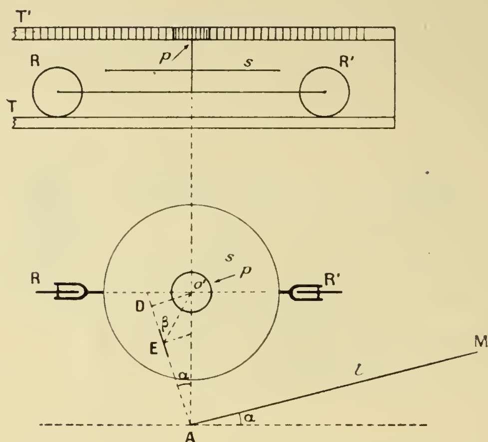
L'appareil comprend (*fig.* 28) un chariot portant l'axe du disque s et monté sur deux roues R, R′ à rebords minces.

Tout l'ensemble se déplace le long d'un cadre reposant sur le dessin et formé de deux traverses parallèles. La traverse inférieure T porte une rainure servant de chemin de roulement aux deux roues R, R′. La traverse supérieure T′ est munie d'une crémaillère sur laquelle engrène un petit pignon p monté sur l'axe du disque et entraînant celui-ci dans le mouvement de translation du chariot.

Le plan de la roulette passe par le point A d'articula-

tion de la tige motrice avec le chariot; il en résulte qu'elle se déplace normalement à son plan, sans tourner,

Fig. 28.



si le bras moteur pivote autour de A. On peut donc ramener le déplacement élémentaire du planimètre à une translation entraînant la rotation du disque et, par suite, celle de la roulette autour de son axe, et à une rotation $d\varphi$ du bras moteur pendant laquelle celle-ci ne tourne pas.

Lorsque le chariot s'est déplacé de dx, le plateau a tourné de $d\gamma$, tel que

$$dx = r\,d\gamma,$$

r étant le rayon du petit pignon. La roulette a tourné de $d\omega$, tel que

$$\rho\,d\omega = \text{O}'\text{E}\,d\gamma \sin\beta.$$

Or

$$\text{O}'\text{E} \sin\beta = \text{O}'\text{D} = \text{O}'\text{A} \sin\alpha.$$

On a donc

$$\rho\, d\omega = \mathrm{O'A}\sin\alpha\, d\gamma = \frac{\mathrm{O'A}}{r}\, dx \sin\alpha,$$

$$dx \sin\alpha = \frac{r}{\mathrm{O'A}}\, \rho\, d\omega,$$

et transportant cette valeur de $dx \sin\alpha$ dans la formule

$$d\mathrm{A} = l\, ds \sin\alpha + \frac{l^2}{2}\, d\varphi,$$

il vient

$$d\mathrm{A} = \frac{l\rho}{\mathrm{O'A}}\, r\, d\omega + \frac{l^2}{2}\, d\varphi,$$

$$\mathrm{A} = \frac{l\rho}{\mathrm{O'A}}\, r\omega + \frac{l^2}{2}\, \varphi + \text{const.},$$

et, si l'on suit une courbe fermée,

$$\mathrm{A} = \frac{l\rho}{\mathrm{O'A}}\, r\omega. \tag{1}$$

Remarque. — Cette théorie est identique à celle du planimètre polaire à disque, et il est facile de vérifier que la valeur de A dans ce planimètre se réduit à l'expression (1), si l'on suppose que, le pôle s'éloignant à l'infini dans la direction AO′, L et R augmentent indéfiniment.

En effet, dans ce cas, la circonférence du disque polaire devient à la limite une droite perpendiculaire à AO′, et l'on a

$$\mathrm{A} = \frac{l\rho\omega}{\frac{\mathrm{R}}{r}\left(1 - \frac{\mathrm{R}+r}{\mathrm{L}}\right)} = \frac{l\rho r\omega}{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}[\mathrm{L} - (\mathrm{R}+r)]} = \frac{l\rho r\omega}{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{AO'}},$$

AO′ étant la distance du centre du disque au point d'articulation du bras moteur.

Si R et L augmentent indéfiniment, A a pour valeur à la limite

$$\frac{l \rho r \omega}{AO'}.$$

On retrouve l'expression (1).

La longueur du chemin que peut parcourir l'appareil est limitée par les dimensions du cadre portant la crémaillère et la rainure de roulement. Avec le planimètre à sphère, on peut, au contraire, mesurer en une seule fois l'aire d'une courbe présentant un développement quelconque dans la direction suivant laquelle se déplace le chariot.

Dans un modèle construit par Amsler, la traverse inférieure du cadre portait la crémaillère; dans la traverse supérieure était creusé le chemin de roulement du chariot auquel était suspendu l'appareil.

La maison Coradi construit un planimètre linéaire spécialement destiné à évaluer l'aire des surfaces qu'on rencontre dans l'étude des problèmes de déplacement et de stabilité en construction navale. Il se compose d'un chariot s'accouplant comme un bras polaire à un planimètre à compensation ordinaire. L'ensemble, chariot et planimètre, se meut dans une longue règle à rainures qu'on dispose parallèlement à la grande dimension du plan.

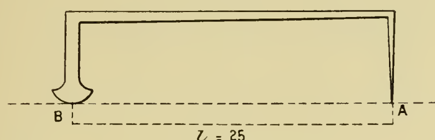
PLANIMÈTRE DE PRYTZ.

Le planimètre imaginé en 1886 par le capitaine Prytz, de l'armée danoise, est remarquable par son extrême simplicité et la commodité de son emploi. Une tige métal-

lique, recourbée à angle droit à ses deux extrémités, constitue tout l'appareil; l'une d'elles est aplatie en lame coupante formant hachette, l'autre se termine par une pointe mousse.

La distance du point A au point de contact de la tan-

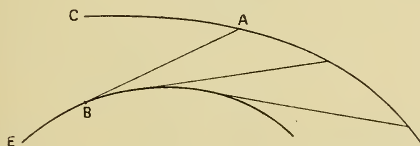
Fig. 29.



gente à la hachette en son milieu est la base de l'instrument; cette longueur est d'environ 25^{cm}. L'appareil étant maintenu dans un plan vertical, si l'on suit avec la pointe A le contour d'une courbe, le tranchant de la hachette trace un sillon sur la feuille de papier et ne subit pas de déplacement latéral sans un effort appréciable. Dans le mouvement continu de A sur la courbe, le point de contact B de la hachette décrit par suite une courbe E à laquelle la droite AB est constamment tangente.

Les deux courbes sont liées entre elles par certaines conditions.

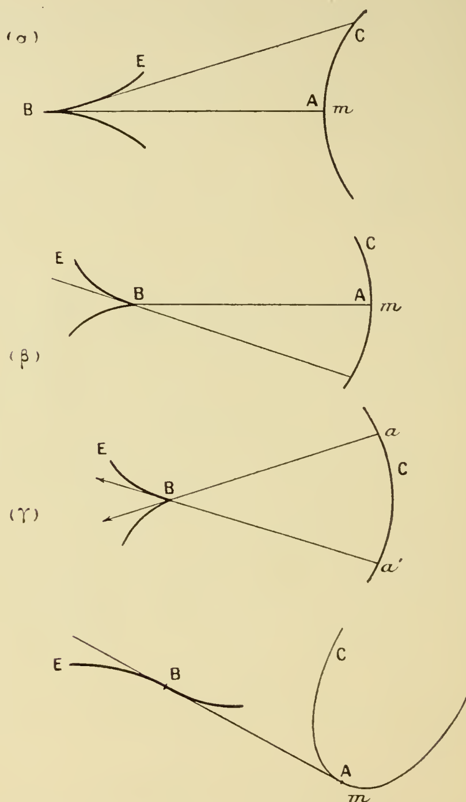
Fig. 30.



La courbe C étant donnée, la courbe E peut être considérée comme le lieu des points B, tels que la droite AB

touche constamment son enveloppe en ce point; son mouvement se réduit alors à une translation et à une rotation élémentaires.

Fig. 31.



Réciproquement, si l'on connaît la courbe E, on obtient C en portant sur chaque tangente et à partir du point de contact une longueur BA égale à l. Le lieu des points A ainsi obtenus est la courbe cherchée.

Mais il est évident qu'à chaque courbe C correspond une infinité de courbes telles que E dont la forme et la position dépendent de l'origine du point A sur C et de l'orientation initiale de AB.

Quelles que soient d'ailleurs leurs positions relatives, les deux courbes présentent certaines particularités résultant de la façon dont elles se déduisent l'une de l'autre.

Si la droite AB (*fig.* 31) est normale en m à la courbe C et si la concavité est du côté opposé à AB, la courbe E présente, en général, un point de rebroussement où les branches de courbe ont la position indiquée par la figure (α).

Si la concavité est tournée vers AB, les deux branches aboutissant en B auront la forme de la figure (β), et si, sur une certaine étendue, la courbe C se confond avec la circonférence de centre B et de rayon AB, la courbe E présente en B un point anguleux où l'angle des tangentes est l'angle au centre de l'arc de cercle aa' (*fig.* γ).

Enfin, on peut encore remarquer que, si la droite AB est tangente en m à la courbe C, la courbe E présente, en général, un point d'inflexion en B.

Théorie de l'appareil. — Il résulte de ce qui précède que le planimètre se réduit à une tige de longueur constante s'appuyant sur deux courbes, dont l'une, la courbe E, joue le rôle de directrice.

Reprenons la formule générale

$$dA = l\,ds \sin\alpha + \frac{1}{2} l^2\,d\varphi.$$

La droite A_1B_1 (*fig.* 32) traçant sa propre directrice à laquelle elle est constamment tangente, on a $\sin\alpha = 0$,

et la formule précédente se réduit à

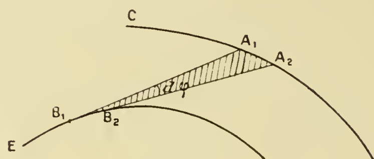
$$dA = \frac{1}{2} l^2 \, d\varphi,$$

d'où, en intégrant,

$$A = \frac{1}{2} l^2 \varphi,$$

la constante étant évidemment nulle (¹).

Fig. 32.



On peut dès lors se rendre compte assez simplement du principe de l'appareil de la façon suivante :

Plaçons la pointe A (*fig.* 33) en un point quelconque m de C et faisons lui parcourir le contour dans le sens de la flèche. Le lieu des points B, de contact de la hachette avec son enveloppe, va être une courbe telle que

---

(¹) On peut d'ailleurs calculer l'aire A directement de la façon suivante :

Soient A_1B_1, A_2B_2 deux vecteurs infiniment voisins, faisant entre eux l'angle $d\varphi$. L'aire élémentaire peut, aux infiniment petits du troisième ordre près, être remplacée par celle du secteur de cercle de rayon l et d'angle $d\varphi$. Sa valeur est

$$dA = \frac{1}{2} l^2 d\varphi$$

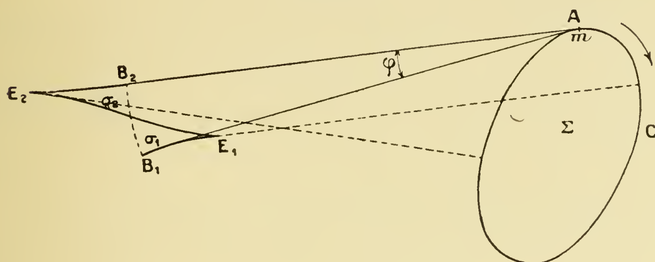
et, en intégrant,

$$A = \frac{1}{2} l^2 \int d\varphi = \frac{1}{2} l^2 \varphi,$$

φ étant l'angle des deux positions extrêmes de AB.

$B_1 E_1 E_2 B_2$ avec des points de rebroussement en E_1, E_2 correspondant aux positions pour lesquelles AB est normale à la courbe C.

Fig. 33.



Lorsque la pointe A est revenue à son point de départ après avoir fait un tour complet, la droite AB occupe la position AB_2 et a tourné d'un angle φ par rapport à AB_1.

D'après ce que nous savons, l'aire balayée par la droite AB est égale à $\frac{1}{2} l^2 \varphi$.

Or, il est facile de voir que l'aire en question se réduit à celle du contour C, que nous désignerons par Σ, et à celle qui est comprise entre AB_1, AB_2 et la courbe $B_1 E_1 E_2 B_2$: soit Σ' cette dernière.

Toutes les autres parties du plan, balayées par la droite AB, le sont deux fois et en sens inverse; la valeur de leur aire ne figure donc pas dans le résultat final de l'opération. Or, si l'on prend comme sens positif celui dans lequel est balayée l'aire Σ (sens de la flèche), Σ' le sera en sens inverse; on doit donc prendre cette dernière avec le signe — et l'on aura

$$(1) \qquad \Sigma - \Sigma' = \frac{1}{2} l^2 \varphi.$$

Pour évaluer Σ', traçons l'arc de cercle $B_1 B_2$ de centre A et de rayon l. On détermine ainsi deux surfaces comprises entre cet arc et la courbe $B_1 E_1 E_2 B_2$: soient σ_1 et σ_2 leurs aires. On a

$$\Sigma' = \frac{1}{2} l^2 \varphi + \sigma_2 - \sigma_1,$$

et transportant cette valeur de Σ' dans (1), il vient

$$\Sigma = l^2 \varphi + \sigma_2 - \sigma_1.$$

Le principe de l'appareil consiste à supposer que les aires σ_1, σ_2 sont égales; l'expression de Σ se réduit alors à

$$\Sigma = l^2 \varphi.$$

Or, $l^2\varphi$, qu'on peut écrire $l \times l\varphi$, représente le produit des nombres qui mesurent la base du planimètre et la longueur de l'arc $B_1 B_2$. Dans la pratique, on obtient un résultat très suffisamment exact en prenant, non pas l'arc, mais la corde $B_1 B_2$.

Pour faire usage du planimètre, il suffit donc de placer la pointe A en un point quelconque du contour et d'effectuer un parcours complet. On repère les points B_1, B_2 correspondant aux points de départ et d'arrivée, ce qu'on fait en appuyant légèrement sur la hachette : le produit de la longueur de l'appareil par la distance $B_1 B_2$ donne l'aire cherchée.

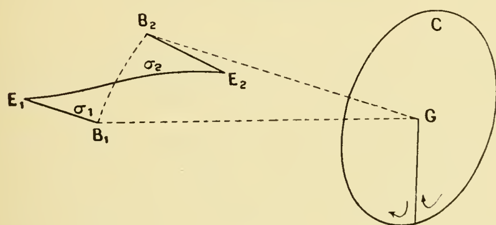
Le point de départ peut être pris, en principe, quelconque sur la courbe C; mais, comme nous savons que la forme de la courbe E dépend de l'orientation initiale de la droite AB, la position de cette dernière n'est pas complètement indifférente.

Il faut, en général, s'arranger de façon que la normale à AB, au point choisi, partage la figure en deux parties équivalentes.

Pour qu'on puisse se servir de l'appareil, il faut que la plus grande dimension de la figure ne soit pas supérieure à la moitié de la longueur AB. Si l'on ne peut effectuer la mesure en une seule fois, on divise par des lignes droites la surface en plusieurs parties, et, après avoir déterminé l'aire de chacune d'elles, on fait la somme des résultats.

Dans la pratique, pour éliminer les causes d'erreur, on

Fig. 34.



retourne la figure de 180°, et l'on recommence l'opération en partant du même point et en faisant en sens opposé un tour complet sur la cour' C. On prend ensuite la moyenne des deux résultats.

Au lieu de prendre le point de départ sur le contour lui-même, on peut le choisir à l'intérieur de la surface. C'est la méthode employée par l'inventeur lui-même dans la théorie qu'il a donnée de son appareil.

On obtient alors la disposition de la figure 34, et l'on a comme précédemment

$$\Sigma = l^2\varphi + \sigma_1 - \sigma_2.$$

En supposant $\sigma_1 = \sigma_2$, il vient

$$\Sigma = l^2 \varphi.$$

Pour que la condition $\sigma_1 = \sigma_2$ soit réalisée, on démontre que le point de départ doit être dans le voisinage du centre de gravité de la surface C.

PLANIMÈTRE DE PETERSEN.

Dans la formule

$$dA = l\,ds \sin\alpha + \frac{l^2}{2}\,d\varphi,$$

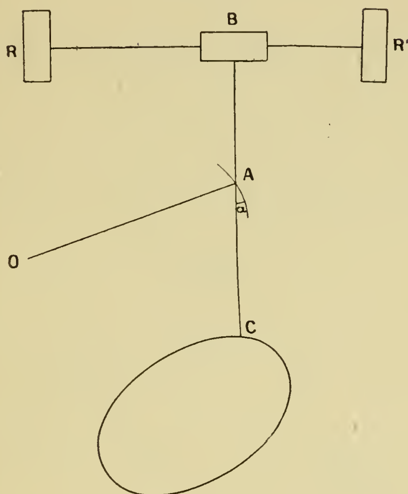
au lieu d'avoir $\sin\alpha = 0$ (cas du planimètre de Prytz), on peut supposer $d\varphi = 0$; la droite BC, de longueur constante, se déplace alors parallèlement à elle-même. C'est d'après ce principe qu'a été construit le planimètre de Petersen. On peut le rattacher à la catégorie des planimètres polaires et il présente cette particularité de ne pas avoir de roulette intégrante.

Sa disposition est la suivante : une tige OA peut servir de bras polaire, le pôle étant en O, et le point A décrivant la directrice. Une seconde tige BC, articulée en A à la première, porte en C le traçoir destiné à parcourir la courbe. L'extrémité B est solidaire d'un manchon qui peut se déplacer, à frottement doux, sur une tige graduée RR′, perpendiculaire à BC. Cette tige sert d'axe de rotation à deux rouleaux à jantes larges; par suite, elle ne peut que se déplacer parallèlement à elle-même.

Quand le traçoir suit la courbe, l'axe RR′ se déplace

donc sous l'action des tiges OA et AB, et le manchon B coulisse sur RR'.

Fig. 35.



Si l'on considère l'égalité

$$dA = l\, ds \sin\alpha,$$

on remarque que $ds \sin\alpha$, projection sur la direction RR' de l'élément de directrice ds, est égal à dx, quantité dont s'est déplacé le manchon.

Donc

$$dA = l\, dx,$$
$$A = lx + \text{const.},$$
$$A = l(x_1 - x_0),$$

x_1 et x_0 étant les lectures faites au commencement et à la fin de l'opération; ces dernières se font à l'aide d'une graduation portée par ia tige RR'.

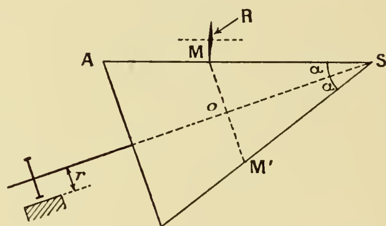
Planimètres à rotation.

THÉORIE.

Considérons un cône de révolution d'angle au sommet égal à 2α, et dont l'axe est incliné de α sur le plan du dessin, de telle sorte, par conséquent, que sa génératrice supérieure SA se trouve être parallèle à ce plan.

Transportons ce cône parallèlement à lui-même en le

Fig. 36.



faisant tourner autour de son axe par l'intermédiaire d'un pignon de rayon r roulant sur un rail parallèle à l'axe des x; un point quelconque M de la génératrice SA décrira sur le parallèle MM′ un arc élémentaire

$$\text{OM}\, d\theta = \text{SM} \sin\alpha \frac{dx}{r},$$

$d\theta$ étant l'angle dont a tourné le cône pendant le déplacement élémentaire dx.

Si maintenant une roulette R a son axe parallèle à SA et accompagne le déplacement du cône en se mouvant sur la génératrice SA, de telle sorte que SM soit constamment égal à y, elle tournera, s'il n'y a pas glissement

dans son plan, d'un angle $d\omega$, tel que

$$\rho\, d\omega = y\, dx \frac{\sin\alpha}{r}.$$

On tire de là

$$d\omega = y\, dx \frac{\sin\alpha}{\rho r},$$

$$\omega = \int_a^b y\, dx \frac{\sin\alpha}{\rho r}.$$

L'angle dont a tourné la roulette permet donc d'évaluer l'aire d'une courbe comprise entre deux limites données.

On peut réaliser la condition $SM = y$ en suivant la courbe avec un traçoir invariablement relié à l'axe de la roulette, et en s'arrangeant de telle sorte que l'ordonnée de cette courbe soit, au début, égale à la distance de la roulette au sommet.

La théorie précédente subsiste si l'on suppose que α devienne égal à $\frac{\pi}{2}$. La surface du cône se réduit alors à un cercle qui, en se déplaçant parallèlement à ox, tourne autour d'un axe vertical passant par son centre.

On a alors

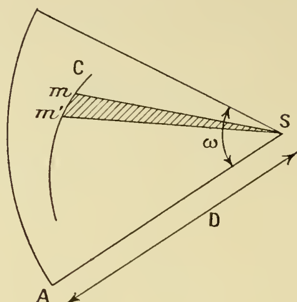
$$\omega = \frac{1}{\rho r} \int_a^b y\, dx.$$

Remarque. — Le lieu du point de contact de la roulette sur la surface du cône est une courbe qu'on peut tracer à l'aide d'un appareil enregistreur. Il est facile de voir que la connaissance de cette courbe permet de déterminer la valeur du moment statique et du moment d'inertie de la courbe proposée, par rapport à ox.

Développons la surface du cône. On obtient (*fig.* 37)

un secteur circulaire d'angle au sommet $\omega = 2\pi \sin\alpha$, et limité par un arc de cercle de longueur $L = \omega D$, D étant

Fig. 37.



la longueur de la génératrice SA. La trace de la roulette se développe suivant une courbe C, et deux génératrices infiniment voisines ont pour trace, dans le développement, deux rayons vecteurs Sm, Sm' faisant entre eux l'angle $d\varphi$.

L'aire élémentaire Smm' a pour expression

$$d\mathcal{A} = \frac{\rho^2}{2} d\varphi.$$

Or $\rho = y$; de plus $d\varphi$ est proportionnel à dx; en effet, l'arc élémentaire mm' a pour valeur

$$ds = \rho\, d\varphi \qquad \text{et} \qquad ds = \text{OM}\, d\theta.$$

Donc

$$\rho\, d\varphi = \text{OM}\, d\theta = \rho \sin\alpha\, d\theta,$$

$$d\varphi = \sin\alpha\, d\theta.$$

$d\theta$, rotation élémentaire du cône, est proportionnel à dx;

par conséquent

$$d\varphi = \sin\alpha\,\lambda\,dx = \mathrm{K}\,dx,$$

et l'on a finalement

$$d\mathcal{A} = \mathrm{K}\frac{y^2}{2}\,dx,$$

$$\mathcal{A} = \mathrm{K}\int_{a_1}^{a_2}\frac{y^2}{2}\,dx = \mathrm{K}\,\mathrm{M}_{ox}\ (\text{aire A}),$$

les limites d'intégration s'étendant à la totalité du développement de la courbe C.

Donc, le moment statique de l'aire de la courbe proposée par rapport à ox est mesurée, à un facteur constant près, par l'aire $\mathcal{A}$ de la courbe C.

Prenons maintenant le moment statique polaire de l'aire $\mathcal{A}$ de cette même courbe C par rapport à S : on a

$$d\mathfrak{M}_s = \frac{\rho^2}{2}\,d\varphi \times \frac{2}{3}\rho,$$

$$d\mathfrak{M}_s = \frac{y^3}{3}\sin\alpha\,\lambda\,dx = \mathrm{K}\frac{y^3}{3}\,dx,$$

et, en intégrant,

$$\mathfrak{M}_s = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{\rho^3}{3}\,d\varphi = \mathrm{K}\int_{a_1}^{a_2}\frac{y^3}{3}\,dx = \mathrm{K}\,\mathrm{I}_{ox}\ (\text{aire A}).$$

Le moment d'inertie de la courbe A par rapport à ox est donc mesuré, à un facteur constant près, par le moment statique, par rapport à S, de l'aire $\mathcal{A}$ de la courbe C.

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'on a affaire à un plateau circulaire, toutes les conclusions précédentes subsistent.

Étant donnée une courbe A, on pourrait donc, par ce

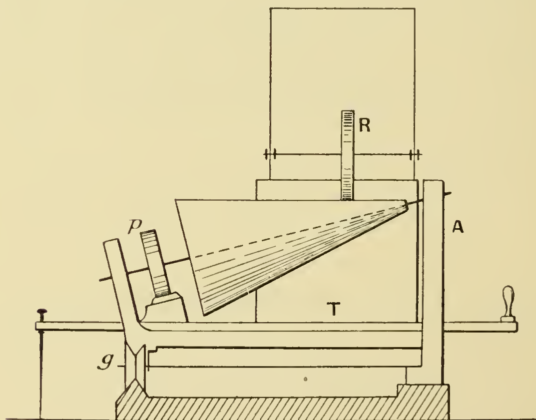
moyen, déterminer la valeur de son aire, de son moment statique et de son moment d'inertie par rapport à *ox*, mais on est obligé d'effectuer trois opérations. Il vaut donc mieux employer un intégromètre qui permet de mesurer, en une seule fois, ces trois quantités.

PLANIMÈTRE D'HOPPIKOFER.

Imaginé vers 1827 par l'ingénieur suisse Hoppikofer, cet appareil était une application directe du principe cône et roulette, que nous venons d'étudier.

Il se compose essentiellement d'un cône en bronze (*fig.* 38) dont la génératrice supérieure est horizontale.

Fig. 38.



L'axe de ce cône repose par l'intermédiaire de deux coussinets sur les supports d'un chariot A, qui peut recevoir un mouvement de translation perpendiculaire à la généra-

trice horizontale. Ce chariot se déplace à l'aide de galets g et de roulettes sur un chemin de roulement constitué par un rail et une bande métallique.

Sur le chariot repose une tige T, qui peut coulisser parallèlement à la génératrice horizontale du cône et porte, à son extrémité droite, une poignée et, à son extrémité gauche, une pointe destinée à suivre le contour de la courbe. Cette tige est en outre reliée invariablement à un cadre supportant la roulette R et un appareil compteur, le tout étant disposé de telle sorte que le point de contact de la roulette se trouve toujours sur la génératrice horizontale.

Enfin, l'axe du cône porte un petit pignon p, pouvant rouler sur une bande métallique parallèle au chemin de roulement du chariot.

Il résulte des dispositions précédentes que, si l'on déplace ce dernier parallèlement à l'axe des x, le pignon p fera tourner le cône autour de son axe de $d\theta$, tel que

$$d\theta = \mathrm{K}\, dx.$$

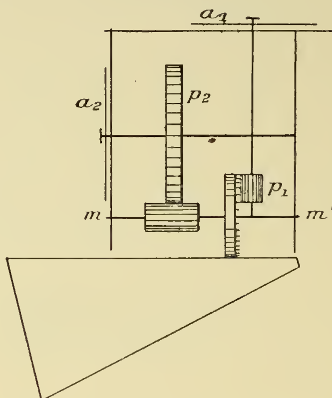
Si, avec la pointe de la tige mobile, on suit, pendant ce mouvement, le contour de la courbe, on voit que la distance du point de contact de la roulette au sommet du cône sera constamment égale à l'ordonnée y, si l'on s'est arrangé de telle sorte que cette condition soit remplie dès le début de l'opération.

Donc, d'après ce qui a été établi précédemment, la rotation de la roulette permet de mesurer l'aire de la courbe donnée.

L'appareil est complété par un compteur disposé de la

façon suivante : deux cadrans, l'un horizontal, l'autre vertical, sont fixés au même support que l'axe de la rou-

Fig. 39.



lette. L'aiguille a_1 du premier est entraînée par un petit pignon p_1 fixé sur son axe et engrenant avec une denture de la roulette.

L'aiguille a_2 du second, ayant son axe parallèle à celui de la roulette, est mise en mouvement par un pignon p_2 en prise avec une roue dentée portée par l'axe mm' de celle-ci.

Ce planimètre fut un des premiers qui permit d'obtenir des résultats vraiment pratiques, et il obtint, sur la proposition de Poncelet, le prix de Mécanique de l'Académie des Sciences. Néanmoins, malgré son principe simple et ingénieux, son emploi ne s'est pas généralisé. On lui a reproché son manque de précision et une usure trop rapide de la roulette.

Il a été modifié par Ernst et le général Morin, mais il

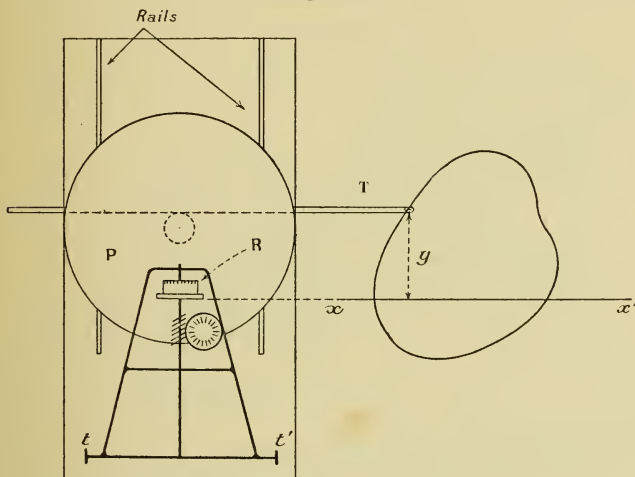
n'offre plus qu'un intérêt historique. Un modèle figure dans la collection du Conservatoire des Arts et Métiers.

PLANIMÈTRE DE WETLI.

Wetli a construit un certain nombre d'appareils utilisant le principe du plateau circulaire et de la roulette. Ils sont disposés en général de la façon suivante :

Le plateau horizontal P peut tourner autour d'un axe

Fig. 40.



vertical porté par un chariot qui se déplace, à l'aide de trois roues, sur des rails parallèles à l'axe des y. Une tige T, montée sur ce chariot, coulisse perpendiculairement à la direction du chemin de roulement et porte, fixé à ses deux extrémités, un fil qui s'enroule autour de l'axe du plateau; cette tige est en outre munie d'un traçoir destiné à suivre le contour de la courbe.

Si donc, à l'aide de ce traçoir, on suit le contour d'une courbe donnée, le chariot se déplace parallèlement à oy, pendant que la tige, dans son mouvement de translation dx parallèle à ox, fait tourner le plateau P d'un angle $d\theta$ proportionnel à dx,

$$d\theta = K\,dx.$$

L'axe de la roulette R est porté par un cadre mobile autour de tourillons t, t' fixés au socle portant le chemin de roulement de l'appareil. La roulette ne se déplace donc pas et tourne seulement autour de son axe, lequel passe par le centre du plateau. Un compteur ordinaire indique, à l'aide d'une transmission par vis sans fin, l'angle dont elle a tourné.

En prenant comme axe des x une droite parallèle à la tige et passant par la projection horizontale du point de contact de la roulette sur le dessin, on voit que l'y de la courbe est constamment égal à la distance de l'axe des x au centre du plateau, augmentée d'une quantité égale au rayon de l'axe.

D'après ce que nous savons, le nombre de tours de la roulette donne, à une constante près, l'aire de la courbe.

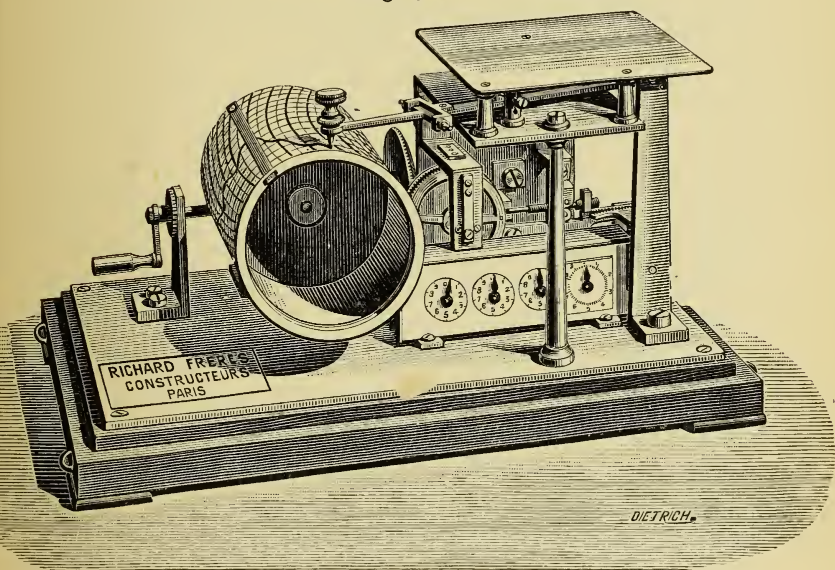
Ces appareils présentent le même inconvénient que les planimètres d'Hoppikofer. Le plateau supporte en effet le poids de la roulette et celui d'une partie du cadre mobile autour de t, t'; ce poids étant concentré au point de contact, c'est-à-dire sur une surface très réduite, il en résulte une usure rapide de la roulette, due au glissemen qui se produit parallèlement à son axe, dans le mouvement relatif par rapport au plateau.

Le planimètre de Wetli, construit à Zurich en 1849, a été décrit par Stampfer dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Vienne* en 1850. Il a été modifié dans la suite par Starke et Hansen; Ausfeld de Gotha a construit également un appareil du même type, dont il existe un modèle dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers.

PLANIMÈTRE DE RICHARD.

La maison Richard a établi un planimètre destiné à

Fig. 41.



évaluer les aires des courbes à ordonnées curvilignes fournies par les appareils enregistreurs qu'elle construit.

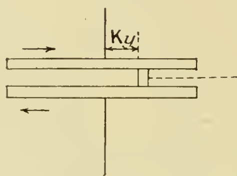
Les indications données par ces appareils se traduisent

par une courbe qu'un style trace sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre tournant. Les abcisses sont comptées sur une circonférence du cylindre; les ordonnées sur des courbes qui, par développement, se transforment en arcs de cercle.

Le planimètre Richard permet également de mesurer toute courbe, fermée ou non, à ordonnées rectilignes.

Il est caractérisé par deux plateaux circulaires verticaux tournant en sens inverse autour du même axe d'un angle

Fig. 42.



proportionnel à dx, et par une roulette dont l'axe est horizontal et dirigé suivant un diamètre des plateaux; cette roulette, placée entre les deux plateaux, tourne autour de son axe sous l'action du couple produit par leur rotation en sens inverse et subit en même temps un déplacement axial qui n'est plus égal à l'y de la courbe, mais lui est proportionnel. L'instrument utilise donc directement le principe des planimètres à rotation. A cet effet, il est disposé de la façon suivante :

Le cylindre C (*fig.* 43), sur lequel a été enroulé le diagramme, peut être entraîné à l'aide d'une vis sans fin et d'une roue hélicoïdale V, par un arbre horizontal A, qui produit en même temps la rotation du plateau P par l'intermédiaire d'un train d'engrenages coniques E.

Cet arbre est mis en mouvement à la main par une manivelle M. Il s'ensuit que la rotation du plateau P est proportionnelle à dx. Si, en effet, l'arbre A tourne de $d\theta$, le cylindre tourne de dx, tel que

$$dx = k\, d\theta.$$

Le plateau P a tourné en même temps de $d\Psi$, tel que

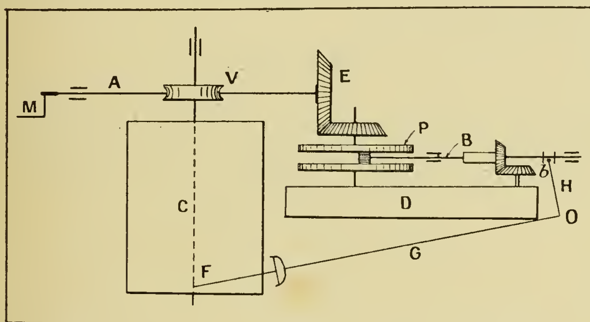
$$d\Psi = k'\, d\theta;$$

d'où

$$dx = \frac{k}{k'}\, d\Psi.$$

La roulette, constituée par un segment de sphère, est

Fig. 43.



fixée sur un axe horizontal B; elle reçoit son mouvement de translation suivant le diamètre des plateaux à l'aide de la petite branche d'un levier H mobile autour de l'axe vertical O, et dont la grande branche G se termine par un traçoir F. Le levier H porte à son extrémité un bouton b s'engageant dans une encoche de l'axe de la roulette. Le levier H peut également commander la tige B

par un secteur denté engrenant sur une crémaillère taillée dans celle-ci.

Si l'on fait tourner le levier G autour de O, le déplacement de l'axe B, et par suite celui de la roulette, seront proportionnels au chemin décrit par le traçoir F, c'est-à-dire à l'ordonnée de la courbe dont on cherche l'aire. Par construction, lorsque la pointe du traçoir est sur l'axe des x, la roulette se trouve au centre des plateaux.

Supposons alors que nous fassions tourner la manivelle de $d\theta$; les plateaux vont tourner, d'après ce que nous savons, de $d\Psi = \frac{k'}{k} dx$.

Le cylindre tourne en même temps de dx, et, y étant l'ordonnée de la courbe à ce moment, l'aire élémentaire du secteur de courbe est

$$dA = y\, dx.$$

La distance de la roulette au centre des plateaux est alors $k''y$; la roulette a donc tourné de $d\omega$, tel que

$$\rho\, d\omega = k''y\, d\Psi = k''\frac{k'}{k} y\, dx,$$

$$\rho\, d\omega = K\, dA,$$

en posant

$$K = \frac{k'k''}{k};$$

d'où

$$\rho\omega = KA.$$

L'angle dont tourne la roulette donne donc la valeur de l'aire cherchée.

Les lectures se font sur un compteur-totalisateur à

quatre cadrans disposé dans une boîte D, et mis en mouvement par l'axe de la roulette, à l'aide d'un pignon long, ou d'un train d'engrenages coniques à long clavetage. Les aires sont données en millimètres carrés.

Ce planimètre est caractérisé par une grande précision et une absence presque totale de glissement, grâce au mode d'entraînement de la roulette.

PLANIMÈTRE A ROTATION D'AMSLER.

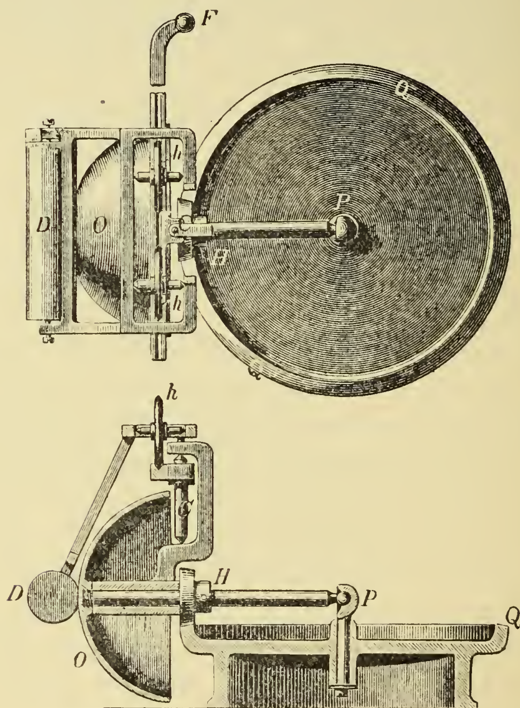
Amsler a construit un appareil dans lequel le cylindre enregistreur est entraîné par une sphère ; c'est un planimètre polaire où l'on retrouve la plupart des dispositifs déjà étudiés.

Il comporte (*fig.* 44) un support circulaire dont le rebord porte une denture Q sur laquelle engrène un petit pignon H calé sur le bras polaire. Ce dernier porte à l'une de ses extrémités une petite sphère épousant exactement la forme de l'évidement d'un axe vertical P qui passe au centre du support et sert d'axe de rotation. A l'autre extrémité est fixée une sphère creuse O, qui tourne autour de l'axe polaire quand celui-ci se déplace autour de P. Le bras moteur est mobile autour d'un axe vertical C, passant par le centre de la sphère O, et porte une rainure dans laquelle peut se mouvoir un chariot supporté par deux roues à bords minces. Ce chariot porte le cylindre dont le point de contact avec la sphère est toujours situé sur la circonférence d'un grand cercle horizontal.

Désignons (*fig.* 45) par L la distance du centre du

support au point d'articulation du bras moteur avec le bras polaire; par R′ le rayon moyen de la denture, r celui du pignon H, R celui de la sphère O.

Fig. 44.



Le déplacement élémentaire du planimètre peut être ramené à une rotation $d\theta$ du bras polaire et à une rotation du bras moteur égale à $d\varphi - d\theta$.

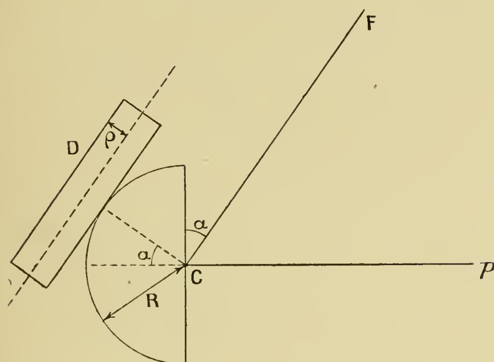
Si alors le bras polaire tourne de $d\theta$ autour du pôle p, le petit pignon, et par suite la sphère O, tourneront autour

de l'axe horizontal pC de $d\Psi$, tel que

$$R' \, d\theta = r \, d\Psi.$$

Soit α l'angle du bras moteur et de la courbe décrite

Fig. 45.



par son point d'articulation avec le braspolaire; le cylindre, dont l'axe est resté parallèle à CF, tournera de $d\omega$, tel que

$$\rho \, d\omega = R \sin\alpha \, d\Psi,$$

ou

$$\rho \, d\omega = \frac{RR'}{r} \sin\alpha \, d\theta,$$

et comme

$$ds = L \, d\theta,$$

$$\rho \, d\omega = \frac{RR'}{rL} \, ds \sin\alpha.$$

En se reportant alors à la formule

$$dA = l \, ds \sin\alpha + \frac{l^2}{2} d\varphi.$$

on a

$$dA = l\rho \frac{rL}{RR'} d\omega + \frac{l^2}{2} d\varphi;$$

d'où

$$A = l\rho \frac{rL}{RR'} \omega + \frac{l^2}{2} \varphi + \text{const.}$$

Comme précédemment, il y a deux cas à examiner suivant que le pôle est intérieur ou extérieur à la courbe.

Pour qu'il n'y ait pas glissement, il faut que l'axe du cylindre et l'axe de rotation de la sphère se trouvent rigoureusement dans un même plan.

Dans un premier modèle construit par Amsler, la sphère O entraînait une roulette intégrante qui se trouvait soumise dès lors à des mouvements de rotation et de glissement. Comme dans le cas précédent, la sphère était menée par un pignon conique, mais son axe était incliné sur l'horizontale.

PLANIMÈTRE J. THOMSON.

On peut encore réaliser de différentes façons des appareils utilisant le principe des planimètres à rotation.

J. Thomson a construit des instruments dans lesquels la rotation du cylindre enregistreur, horizontal, a lieu par l'intermédiaire d'une sphère entraînée elle-même par la rotation d'un plateau tournant d'un angle proportionnel à dx. Cette sphère se déplace suivant un diamètre du plateau parallèle à l'axe du cylindre, à l'aide d'une fourche formant l'extrémité d'un bras porte-style. Le déplacement de ce bras étant constamment égal à la variation de l'ordonnée de cette courbe, on peut s'arranger de façon que

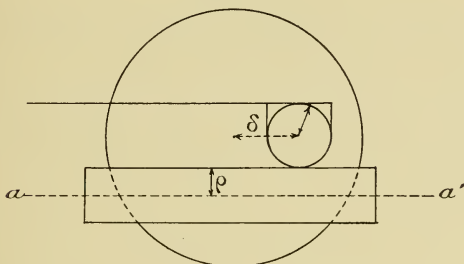
la distance du point de contact de la sphère sur le plateau au centre de ce dernier soit égale à cette ordonnée.

Soient R le rayon de la sphère, δ la distance de son point de contact au centre du disque, $K\,dx$ la rotation élémentaire de celui-ci et $d\Psi$ celle de la sphère ; on aura

$$\delta K\, dx = R\, d\Psi.$$

Pendant ce mouvement, la sphère roule sur le cylindre

Fig. 46.



le long de la génératrice de contact et entraîne sa rotation autour de l'axe aa'.

On a alors

$$\rho\, d\omega \quad R\, d\Psi,$$

d'où finalement

$$\rho\, d\omega = K y\, dx,$$

puisque $\delta = y$.

L'angle ω dont le cylindre a tourné donnera donc la valeur de l'intégrale

$$\int y\, dx.$$

D'une façon générale, si δ est une fonction de x, $\delta = f(x)$, on peut à l'aide de ces appareils, déterminer la

valeur de l'intégrale

$$\int f(x)\,dx.$$

Dans les appareils construits par J. Thomson, le plateau a une inclinaison de 45° sur l'horizon, de telle sorte que l'effort seul de la pesanteur produit les mouvements d'entraînement. Les planimètres de cette catégorie sont d'une construction compliquée, mais sont caractérisés par la suppression presque complète des frottements.

APPLICATION DU PLANIMÈTRE AU CALCUL D'INTÉGRALES.

Les différents planimètres que nous venons d'étudier permettent d'évaluer par une simple opération l'aire d'un contour fermé, c'est-à-dire de déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int y\,dx = \int f(x)\,dx,$$

si la courbe, rapportée à des axes rectangulaires, est donnée par l'équation

$$y = f(x).$$

Construisons maintenant une courbe ayant mêmes abscisses, mais dont les ordonnées soient les carrés des ordonnées correspondantes de la première courbe. On peut alors avec le planimètre déterminer l'aire de cette deuxième courbe qui a pour valeur

$$\int y^2\,dx = 2\,\mathrm{M}_{ox}(\mathrm{A}),$$

c'est-à-dire le double du moment de l'aire A par rapport a ox.

Construisons dans les mêmes conditions une troisième courbe ayant pour ordonnées y^3 : son aire aura pour valeur,

$$\int y^3\,dx = 3\,I_{ox}(A),$$

c'est-à-dire trois fois la valeur du moment d'inertie de A par rapport à ox.

On peut donc avec un planimètre ordinaire obtenir, par trois mesures successives, lès valeurs de A, M_{ox} (A) et I_{ox} (A).

Planimètres spéciaux.

PLANIMÈTRE RADIAL DE DURAND-AMSLER (1).

On construit depuis quelque temps des appareils enregistreurs dans lesquels les diagrammes sont tracés dans un système de coordonnées polaires. A cet effet, un disque en papier tourne autour de son centre d'un mouvement uniforme pendant qu'un style se meut, soit en ligne droite, soit suivant un arc de cercle, en s'éloignant ou en se rapprochant du centre.

Ces instruments, très répandus en Amérique, sont employés pour les mesures du travail mécanique, de la température, de l'énergie électrique.

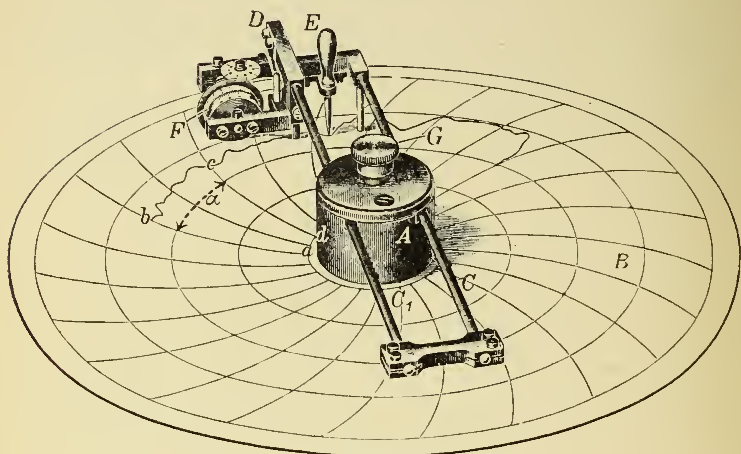
Les planimètres ordinaires ne pouvant être utilisés pour l'évaluation des diagrammes de ce genre, le professeur W.-F. Durand, de l'Université de Leland-Stanford, a

---

(1) Ce planimètre a été décrit dans la *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, juillet 1911.

proposé en 1908, à l'American Society of Mechanical Engineers, un planimètre permettant de déterminer rapidement la valeur de l'ordonnée moyenne d'un diagramme.

Fig. 47.



L'appareil comprend deux tiges parallèles C, C_1 pouvant coulisser dans un poids A placé au centre du diagramme : ces deux tiges peuvent en même temps tourner autour de ce centre. Elles sont réunies à l'une de leurs extrémités par un cadre D portant la roulette-enregistreuse F et le traçoir avec lequel on suit le contour de la courbe. La droite passant par le centre de rotation et par la pointe du traçoir forme à chaque instant le rayon vecteur et est parallèle à la direction des deux tiges : enfin l'axe de la roulette doit aussi être rigoureusement parallèle à cette direction.

Si l'on suit avec le traçoir le contour d'une courbe fer-

mée, l'indication de la roulette est proportionnelle au produit de la valeur moyenne du rayon vecteur par l'angle α compris entre les rayons vecteurs extrêmes ; en divisant par α le nombre relevé au compteur de la roulette, on obtient donc la valeur de l'ordonnée moyenne du diagramme.

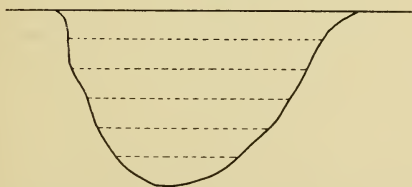
Pour faire usage de l'instrument on tourne la molette G jusqu'à ce que la pointe centrale dépasse le plan inférieur du poids ; on l'introduit alors dans le trou qui se trouve au centre du disque de papier, et trois autres pointes portées par le poids assurent la fixité de l'appareil sur la feuille du diagramme.

PLANIMÈTRE DE BEUVIÈRE.

Ce planimètre, dont il existe deux modèles légèrement différents dans la collection du Conservatoire des Arts et Métiers, a été imaginé par Beuvière, chef des travaux du cadastre.

On partage la surface dont on cherche l'aire en un cer-

Fig. ..



tain nombre de bandes de même hauteur ; on obtient ainsi des trapèzes mixtilignes *abcd* auxquels on substitue des rectangles équivalents ; il suffit pour cela de mener une

parallèle mn aux côtés ab, cd, telle que la somme algébrique des aires des surfaces ombrées à l'intérieur et à

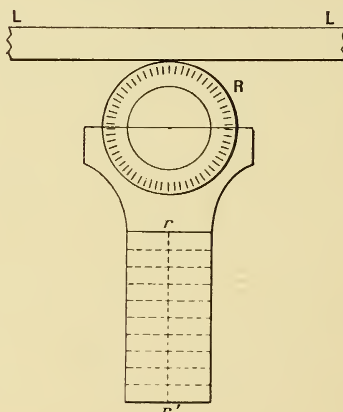
Fig. 49.



l'extérieur du contour soit nulle, et de mesurer la longueur mn.

L'appareil comporte un chariot muni d'une plaque de verre, sur laquelle sont gravées des lignes parallèles à l'aide desquelles on obtient la division par bandes. Celles-ci en réalité ne sont pas tracées sur le dessin. Une roue

Fig. 50.



graduée R, dont le plan est parallèle à la plaque de verre, est portée par le chariot et roule sur une règle LL parallèle aux bandes.

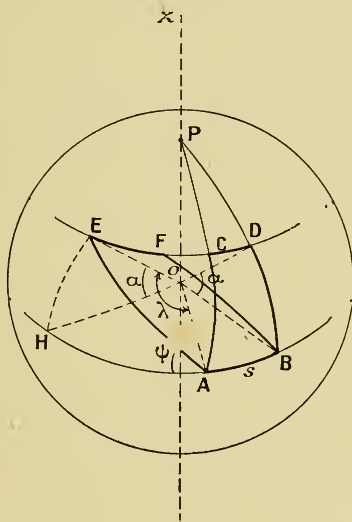
Pour obtenir la longueur de chaque bande, on note, à

l'aide des divisions de la roue, le chemin qu'elle a parcouru quand le trait rr' de la plaque s'est déplacé par exemple de m en n.

PLANIMÈTRE SPHÉRIQUE D'AMSLER.

Théorie. — Considérons (*fig.* 51) une sphère de rayon R et deux plans parallèles dont l'un passe par le centre. Si par le diamètre Oz perpendiculaire à ces plans on mène deux autres plans, on obtient trois arcs de grand

Fig. 51.



cercle AB, AC, BD, qui, avec l'arc de petit cercle CD, forment un rectangle sphérique. Par les points A et B faisons passer deux arcs de grand cercle AE, BF dont les plans fassent le même angle ψ avec le plan du grand

cercle AB. On a un second quadrilatère sphérique ABFE ayant même surface que le rectangle ABDC.

Évaluons l'aire du quadrilatère ABFE.

On a

$$\text{surf. ABFE} = \text{surf. ABDC} = s\,R \sin\alpha.$$

Or, dans le triangle sphérique AEH, rectangle en H, l'arc de grand cercle EH ayant pour angle au centre l'angle α, on a

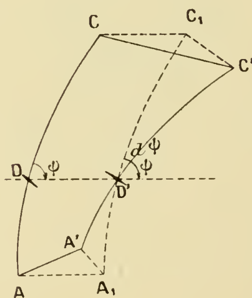
$$\sin\alpha = \sin\lambda \sin\psi,$$

d'où finalement

$$\text{(1)} \qquad \text{surf. ABFE} = s\,R \sin\lambda \sin\psi,$$

Soit maintenant AC (*fig.* 52) un arc de grand cercle de longueur constante, auquel est reliée une roulette dont le plan est normal à l'arc AC au point D.

Fig. 52.



Supposons que cet arc se déplace sur sa sphère de rayon R et considérons deux positions infiniment voisines AC, A′C′; comme dans la théorie du planimètre polaire servant à la mesure des surfaces planes, nous allons évaluer

l'aire balayée par l'arc AC dans son déplacement élémentaire.

Soient ds l'arc de grand cercle DD′ parcouru par le point de contact de la roulette, ψ l'angle de AC avec DD′.

Le déplacement élémentaire peut être considéré comme produit par une translation, sur la surface de la sphère, de AC en A_1C_1 faisant l'angle ψ avec DD′, suivie d'une rotation $d\psi$ autour de D′ amenant A_1C_1 à la position A′C′.

La surface des triangles sphériques $AA'A_1$, $CC'C_1$, étant infiniment petite du deuxième ordre, peut être négligée et l'on a

$$\text{surf. } AA'C'C = \text{surf. } AA_1D'D + \text{surf. } DD'C_1C + \text{surf. } D'C'C_1 - \text{surf. } D'A'A_1.$$

Si l'on désigne par λ_1, λ_2 les angles au centre des arcs de grand cercle DA et DC, on a, d'après la relation (1),

$$\text{surf. } AA'C'C = R\,ds \sin\psi \sin\lambda_1 + R\,ds \sin\psi \sin\lambda_2 + R^2(1-\cos\lambda_2)\,d\psi - R^2(1-\cos\lambda_1)\,d\psi,$$

ou

$$d\Sigma = R(\sin\lambda_1 + \sin\lambda_2)\,ds \sin\psi + R^2\,d\psi(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2).$$

Or $ds \sin\psi$ représente la projection du chemin DD′ sur le plan de la roulette, c'est-à-dire l'arc développé sur sa circonférence dans la rotation autour de son axe, pendant le déplacement élémentaire; soit $\rho\,d\omega$ la longueur de cet arc.

La relation précédente devient

$$d\Sigma = R\rho(\sin\lambda_1 + \sin\lambda_2)\,d\omega + R^2(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2)\,d\psi,$$

et, en intégrant,

$$\Sigma = R\rho(\sin\lambda_1 + \sin\lambda_2)\int d\omega + C\int d\psi,$$

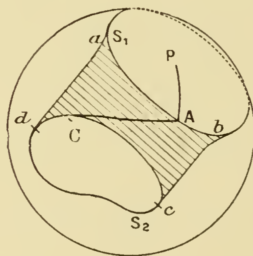
en désignant par C la quantité $R^2 (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)$. $\int d\omega$ est l'angle dont a tourné la roulette ; sa valeur est donnée par le compteur de l'appareil comme dans le planimètre polaire ordinaire. Elle permet donc d'évaluer l'aire Σ. Or quand l'arc AC parcourt une surface déterminée, en revenant à son point de départ, les points A et C décrivent sur la sphère deux courbes fermées S_1, S_2.

Soient σ_1 et σ_2 les aires de ces courbes.

Si, pendant que le point C décrit S_2, le point A parcourt seulement une portion de la courbe S_1 et revient finalement à son point de départ, $\int d\psi = 0$.

La surface sphérique *abcd* comprise entre S_2, l'arc *ab* et les enveloppes *ad*, *bc* des positions successives de l'arc

Fig. 53.



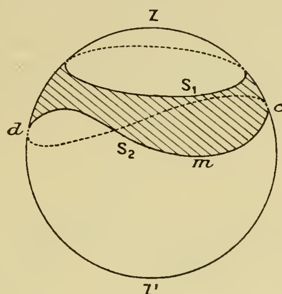
de grand cercle AC, est balayée deux fois et en sens inverse. L'aire mesurée se réduit donc à celle de la courbe S_2, et l'on a

$$\Sigma = \sigma_2.$$

Si maintenant le point A parcourt entièrement la courbe S_1 quand C décrit la courbe S_2, $\int d\psi$ est égal

à 2π, et Σ mesure l'aire de la surface sphérique comprise entre les deux courbes.

Fig. 54.



En considérant comme surface de la courbe S_2 la surface *dmcZ*, on a

$$\sigma_2 = \Sigma + \sigma_1.$$

En général on aura

$$\Sigma = \sigma_2 - \sigma_1 + K.$$

Remarque. — Dans certains cas particuliers on pourra également avoir

$$(\alpha) \qquad \Sigma + \sigma_1 + \sigma_2 = 4\pi R^2,$$

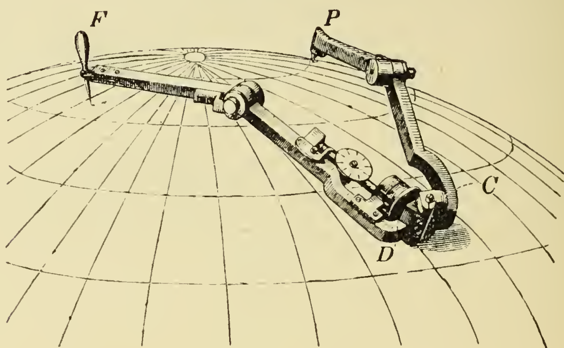
car une courbe fermée tracée sur une sphère la partage en deux parties dont chacune peut être considérée comme étant la surface de la courbe.

L'égalité (α) suppose alors qu'on prend pour surface de la courbe S_2 la portion de sphère *dmcZ'*.

L'appareil imaginé par Amsler présente des dispositions analogues à celles du planimètre polaire qu'il a construit pour la détermination de l'aire des surfaces planes. Les

axes qui dans ce dernier cas sont perpendiculaires au plan du dessin (axe du traçoir, de la charnière, et de la pointe du pôle) doivent dans le planimètre sphérique être normaux à la surface de la sphère. Dans ce but et pour faciliter le maniement de l'appareil, les deux bras sont munis en leur milieu d'une charnière qui est perpendiculaire à leur

Fig. 55.



axe longitudinal et à l'axe de l'articulation C qui les réunit. Le point de contact de la roulette doit en outre se trouver sur l'arc de grand cercle passant par C et par la pointe du traçoir.

Les lectures se font à l'aide d'un appareil compteur identique à celui d'un planimètre ordinaire.

STÉRÉOGRAPHOMÈTRE.

Le stéréographomètre, dont il existe un modèle dans la collection du Conservatoire des Arts et Métiers, a été imaginé par Amsler; il est destiné à évaluer l'aire d'une

surface sphérique dont on connaît la projection stéréographique.

L'appareil comprend essentiellement (*fig.* 56) trois tiges, *a*, *b*, *p* et deux roues dentées R_1, R_2, mobiles autour de leurs centres et engrenant l'une sur l'autre : elles sont montées sur un même support solidaire de la tige *p*, qui est perpendiculaire à la ligne des centres C_1C_2. La roue R_2 a un diamètre double de celui de R_1 et cette dernière porte une roulette intégrante R reposant sur la feuille du dessin comme dans un intégromètre à moments ordinaire. Cette roulette est disposée de telle sorte que son axe fasse constamment avec la ligne C_1P un angle égal à 2ω.

Fig. 56.

La tige *a* peut glisser suivant sa longueur et toujours

dans une direction perpendiculaire à p; à cet effet, elle est maintenue par des galets gg... dont les axes sont fixés à une pièce M solidaire de la tige p.

La roue R_2 est reliée invariablement à la tige b, et cette dernière passe librement dans un collier S fixé à a et mobile autour de l'axe perpendiculaire au plan de la figure passant par l'intersection des deux droites.

L'extrémité F de la tige a est munie d'un style avec lequel on suit le contour de la courbe donnée.

Tout l'ensemble peut tourner autour d'une pointe P, fixée au support M, et qui sert de pôle à l'instrument : ce point est située sur la perpendiculaire abaissée du centre C_1 sur la tige a. Pour effectuer une mesure, on place le pôle P au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de projection stéréographique sur le plan du dessin, et avec le style F, on parcourt entièrement le contour s; la différence des lectures indiquées par la roulette permet de calculer l'aire de la surface sphérique dont s est la projection stéréographique.

Théorie. — La théorie de l'appareil, donnée par Amsler, peut s'établir de la façon suivante [1]:

Considérons (*fig.* 57) une sphère de diamètre PC_1 tangente en P au plan du dessin sur lequel est tracée la projection stéréographique.

Il s'agit de déterminer l'aire de la surface sphérique comprise à l'intérieur de la courbe s', intersection de la

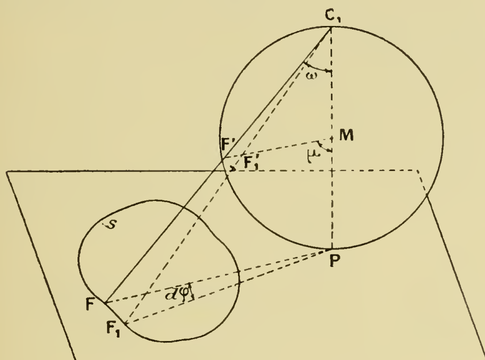
---

(1) *Deutsche Mathematiker-Vereinigung, Katalog Mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente*, 1892.

sphère avec le cône de sommet C_1 ayant pour directrice la courbe s.

Si l'on désigne par μ l'angle PMF' et par φ l'angle que le plan PC_1F' fait avec un plan fixe quelconque passant

Fig. 57.



par PC_1, l'aire de la figure sphérique s' a pour expression

$$A' = \frac{p^2}{4} \int \cos\mu \, d\varphi,$$

ou, puisque $\mu = 2\omega$,

$$(1) \qquad A' = \frac{p^2}{4} \int \cos 2\omega \, d\varphi,$$

l'intégration s'étendant à la totalité du contour de la surface s'.

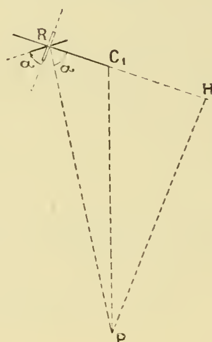
Rabattons les deux plans infiniment voisins PC_1F, PC_1F_1 sur le plan de projection, autour de leurs traces respectives PF, PF_1. Les deux triangles PC_1F, PC_1F_1 occupent, après rabattement, les positions qu'aurait prises le triangle PC_1F de la figure 56 avant et après la rotation $d\varphi$ de l'instrument autour du pôle P.

Supposons (*fig.* 56) que, pendant cette rotation, la pointe F soit venue en F_1 sur le contour s et voyons quel a été le développement correspondant de la roulette R.

Le déplacement élémentaire FF_1 peut être considéré comme produit par la rotation $d\varphi$ de la tige a autour du pôle P et par la translation F_2F_1 de cette même tige suivant sa propre direction.

Du fait du premier mouvement, le point de contact de

Fig. 58.



la roulette décrit sur la feuille de dessin un arc de cercle élémentaire de longueur $PR\,d\varphi$. Si l'on désigne par α l'angle PRC_1, le développement correspondant de la roulette est par suite $PR\cos\alpha\,d\varphi$.

Dans le second déplacement, de F_2 en F_1, la tige b tourne de $d\omega$ autour du centre C_2; la roue R_1 tourne de $2\,d\omega$ et la roulette R développe $2\,RC_1\,d\omega$.

Le développement total de celle-ci est donc

$$du = PR\cos\alpha\,d\varphi + 2\,RC_1\,d\omega.$$

Or dans le triangle PRH, on a

$$\mathrm{PR}\cos\alpha = \mathrm{RC}_1 + \mathrm{C}_1\mathrm{H} = \mathrm{RC}_1 + \mathrm{PC}_1 \cos 2\omega\,;$$

d'où, pour la valeur du développement,

$$du = \mathrm{RC}_1\, d\varphi + p\cos 2\omega\, d\varphi + 2\,\mathrm{RC}_1\, d\omega,$$

et, en intégrant,

$$u = \mathrm{RC}_1 \int d\varphi + p\int \cos 2\omega\, d\varphi + 2\,\mathrm{RC}_1 \int d\omega.$$

Lorsque la pointe F a parcouru entièrement le contour s, la tige b a repris, par rapport aux autres parties de l'instrument, la même position relative qu'au début de l'opération : par suite $\int d\omega = 0$.

D'autre part $\int d\varphi$ est nul ou égal à 2π, suivant que le pôle P est extérieur ou intérieur à la courbe s.

On a alors, suivant les cas,

$$u = p\int \cos 2\omega\, d\varphi,$$

$$u = p\int \cos 2\omega\, d\varphi + 2\pi\,\mathrm{RC}_1.$$

Si l'on se reporte à l'équation (1) donnant l'aire A' de la surface sphérique, on a finalement

$$\mathrm{A}' = \frac{p}{4}\,u.$$

ou

$$\mathrm{A}' = \frac{p}{4}\,u - \pi\,\frac{p\,\mathrm{RC}_1}{2}.$$

Les quantités $\frac{p}{4}$ et $\pi\frac{p\,\mathrm{RC}_1}{2}$ sont des constantes de l'appareil.

CHAPITRE II.

LES INTÉGROMÈTRES.

Principe des intégromètres.

Nous avons vu que pour déterminer, à l'aide du planimètre, la valeur des intégrales

$$\int y^2\,dx \qquad \text{et} \qquad \int y^3\,dx, \quad \ldots,$$

il était nécessaire de construire préalablement des courbes auxiliaires dont les ordonnées étaient respectivement les carrés ou les cubes des ordonnées de la courbe primitive.

Les appareils généralement appelés *intégromètres* (quelquefois *planimètres à moments*) permettent de calculer en une seule opération les trois intégrales

$$\int y\,dx, \quad \int y^2\,dx, \quad \int y^3\,dx;$$

ils peuvent même être disposés pour donner la valeur de l'intégrale $\int y^4\,dx$, c'est-à-dire pour calculer, par exemple, le moment d'inertie des corps de révolution par rapport à leur axe géométrique ou encore par rapport à tout autre axe.

Principe des intégromètres. — Considérons (*fig.* 59) le bras moteur MM′ d'un planimètre linéaire.

On a

$$y = l \sin \alpha,$$
$$y^2 = l^2 \sin^2 \alpha, \quad \ldots, \quad y^n = l^n \sin^n \alpha.$$

L'évaluation des intégrales successives

$$\int y^2\, dx, \quad \ldots, \quad \int y^n\, dx,$$

revient donc à celle de

$$l^2 \int \sin^2 \alpha\, dx, \quad \ldots, \quad l^n \int \sin^n \alpha\, dx,$$

étendue à la totalité du contour de la courbe fermée.

Transformons $\sin^n \alpha$ en une somme de sinus d'angles égaux à des multiples de α ou a leurs compléments.

On a [1] :

I

si n est pair,

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \sin^n \alpha = \cos n\alpha - \frac{n}{1} \cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)\alpha + \ldots,$$

et si n est impair,

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin^n \alpha = \sin n\alpha - \frac{n}{1} \sin(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin(n-4)\alpha + \ldots.$$

---

(1) Ces formules s'établissent facilement de la façon suivante : Considérons les expressions conjuguées:

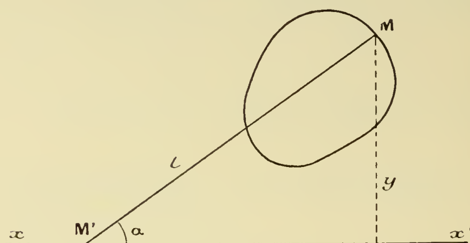
$$u = \cos\alpha + i \sin\alpha$$
$$v = \cos\alpha - i \sin\alpha.$$

On en tire, par soustraction,

$$2 i \sin\alpha = u - v,$$

En remplaçant, dans l'intégrale $l^n \int \sin^n \alpha\, dx$, $\sin^n \alpha$ par les valeurs ainsi trouvées, on voit que celle-ci se trans-

Fig. 59.



forme en une somme algébrique d'expressions de la forme

$$K\, l^n \int \sin m\alpha\, dx$$

---

ou

$$2(-1)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha = (u - v).$$

Élevons à la puissance n; il vient, par application de la formule du binôme,

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha = u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1,2} u^{n-2} v^2 \ldots$$

Si n est pair, ce développement peut s'écrire, en réunissant les termes équidistants des extrêmes,

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha = u^n + v^n - \frac{n}{1} uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \ldots$$

Or uv, et ses puissances successives, est toujours égal à 1; de plus, d'après la formule de Moivre,

$$u^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$v^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$$

d'où

$$u^n + v^n = 2 \cos n\alpha;$$

de même

$$u^{n-2} + v^{n-2} = 2 \cos (n-2)\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$K l^n \int \cos m\alpha \, dx,$$

m étant successivement égal à n, $n-2$, ...

Il suit de là que si, à l'aide d'un mécanisme approprié, une roulette intégrante se déplace en même temps que le bras moteur, de telle sorte que son axe fasse avec xx' (*fig.* 60) un angle constamment égal à $m\alpha$ ou à son complément, quand l'extrémité t parcourt la courbe, elle enregistre les intégrales

$$\int \sin m\alpha \, dx = \rho\omega_m$$

Donc il vient finalement, en remplaçant,

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha = 2\cos n\alpha - \frac{n}{1} \cdot 2\cos(n-2)\alpha + 2\,\frac{n(n-1)}{1,2}\cos(n-4)\alpha \ldots,$$

ou

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \sin^n\alpha = \cos n\alpha - \frac{n}{1}\cos(n-2)\alpha + \frac{n(n-1)}{1,2}\cos(n-4)\alpha \ldots.$$

Si n est impair, on a

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha = u^n - v^n - \frac{n}{1} uv(u^{n-2} - v^{n-2}) \ldots.$$

Or

$$u^n - v^n = 2(-1)^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha$$

$$u^{n-2} - v^{n-2} = 2(-1)^{\frac{1}{2}} \sin(n-2)\alpha$$

....

et, en remplaçant,

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha = 2(-1)^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha - \frac{n}{1}\, 2(-1)^{\frac{1}{2}} \sin(n-2)\alpha, \ldots$$

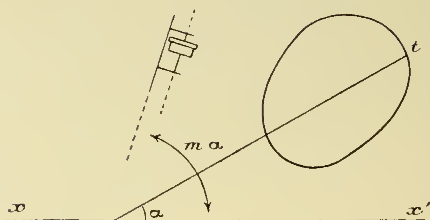
ou

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \sin^n\alpha = \sin n\alpha - \frac{n}{1}\sin(n-2)\alpha + \ldots.$$

ou

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - m\alpha\right) dx = \rho\omega_m.$$

Fig 60.



Dans les formules (1), faisons n égal successivement à 2, 3, 4.

On a :

$$n = 2, \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right),$$

et, pour la valeur du moment,

$$M_{xx'} = \frac{1}{2}\int y^2\,dx = \frac{l^2}{4}\left[-\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx + \int dx\right].$$

et si on l'intègre le long d'une courbe fermée, $\int dx$ étant nul,

$$M_{xx'} = -\frac{l^2}{4}\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx,$$

$$M_{xx'} = -\frac{l^2}{4}\rho\omega_2,$$

ω_2 étant l'angle dont a tourné la roulette qui a son axe incliné de $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ sur xx'.

$$n = 3, \qquad \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha}{4} - \frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

La valeur du moment d'inertie de l'aire A par rapport à xx' est

$$I_{xx'}(A) = \frac{1}{3}\int y^3\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{l^3}{4}\left(3\int \sin\alpha\,dx - \int \sin 3\alpha\,dx\right),$$

$$I_{xx'}(A) = \frac{l^3}{12}(3\rho\omega_1 - \rho\omega_3),$$

ω_1 et ω_3 étant les angles dont ont tourné les roulettes ayant leurs axes respectivement inclinés de α et 3α sur xx'.

$$n = 4, \qquad 8\sin^4\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 3.$$

L'intégrale $\frac{1}{4}\int y^4\,dx$ a pour expression

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int y^4\,dx &= \frac{1}{4}\int l^4 \sin^4\alpha\,dx\\ &= \frac{1}{32}l^4\left[\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)dx\right.\\ &\qquad \left. - 4\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)dx + 3\int dx\right],\end{aligned}$$

et en intégrant le long d'un contour fermé, $\int dx$ étant nul, on a finalement

$$\frac{1}{4}\int y^4\,dx = \frac{l^4}{32}(\rho\omega_4 - 4\rho\omega_2),$$

ω_4 étant l'angle dont a tourné la roulette ayant son axe incliné de $\frac{\pi}{2} - 4\alpha$ sur xx' et ω_2 ayant la même signification que précédemment.

Remarque. — Si l'on désigne par R_1, R_2, R_3, R_4 les quatre roulettes intégrantes, on voit que, quand α est nul, les roulettes R_1 et R_3 ont leurs axes parallèles à xx', et

que les roulettes R_2 et R_4 ont, au contraire, leurs axes perpendiculaires à cette même direction. L'appareil doit donc être établi de telle sorte que cette condition soit remplie quand le bras porte-style est parallèle à xx'.

Intégromètres d'Amsler.

Amsler a donné un certain nombre d'appareils destinés à déterminer la surface, le centre de gravité et les moments d'inertie des aires planes et des corps de révolution.

INTÉGROMÈTRE DONNANT LA VALEUR DES INTÉGRALES

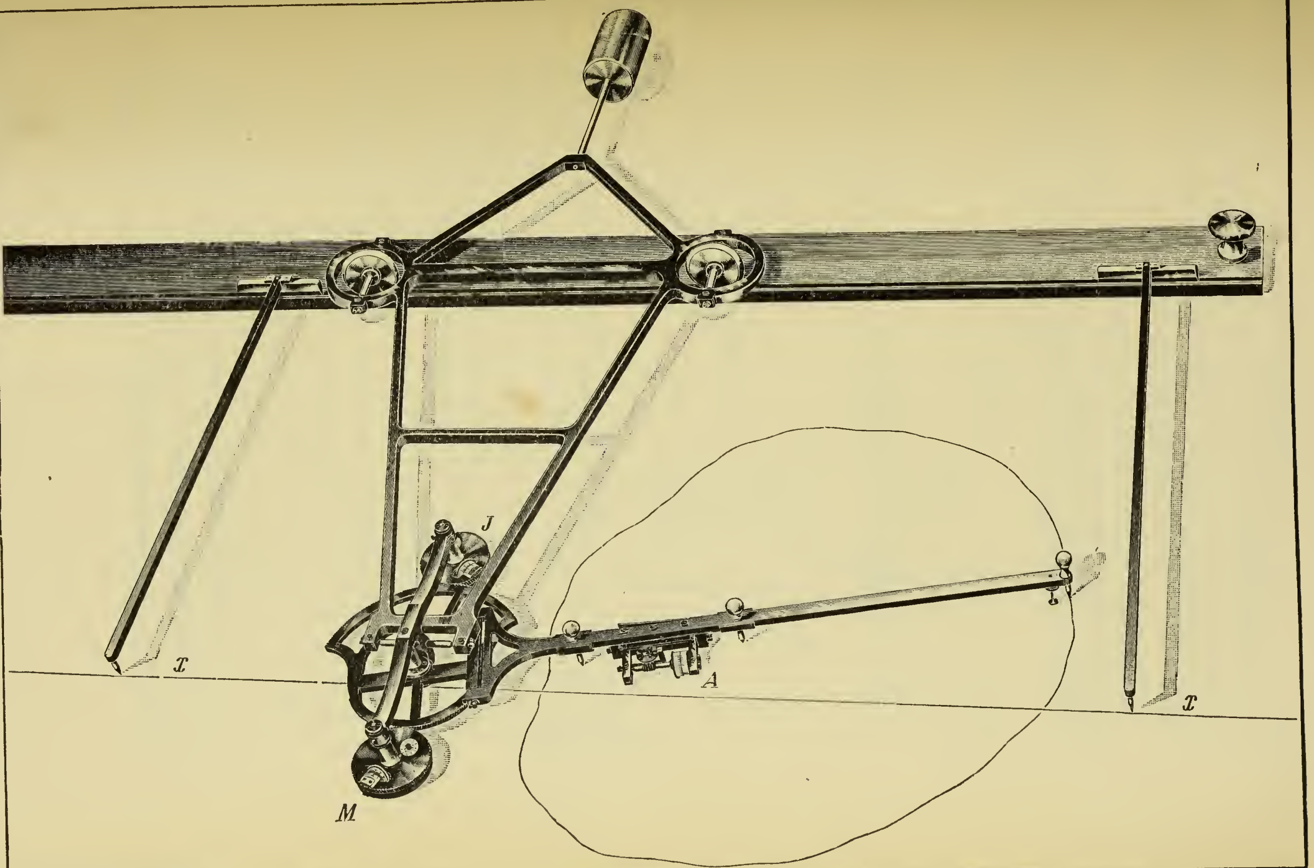
$$\int y\,dx, \quad \int y^2\,dx, \quad \int y^3\,dx.$$

La figure 61 donne une vue de cet appareil. Il comporte (*fig.* 62) un chariot monté sur deux roues à rebords minces R, R, qui peuvent rouler dans la rainure BB taillée dans une longue règle métallique qu'on dispose sur la feuille du dessin parallèlement à l'axe des x.

Le cadre du chariot porte trois axes verticaux O_1, O_2, O_3, situés sur son axe de symétrie, c'est-à-dire sur une même perpendiculaire à xx'.

Autour de O_1 pivote le bras D muni à son extrémité C d'un traçoir, et en E d'une roulette intégrante ordinaire avec compteur. Ce bras est solidaire à son autre extrémité d'un cercle portant deux secteurs circulaires ayant pour centre commun O_1 et pour rayons respectifs $2r$ et $3r$. Chacun de ces secteurs engrène avec une roue dentée de

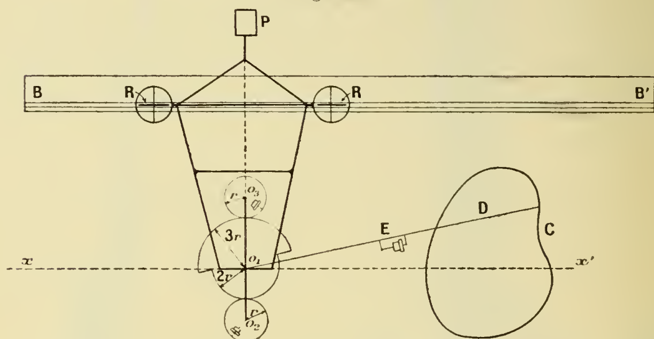
Fig. 61.



rayon égal à r et pouvant tourner autour des axes O_2 et O_3. Ces deux roues sont munies chacune d'une roulette intégrante dont l'axe est dirigé suivant un rayon.

Il résulte des dispositions précédentes que si, avec le traçoir, on suit le contour d'une courbe fermée, le chariot se déplace parallèlement à l'axe des x. Le centre O_1

Fig. 62.



décrivant alors une droite parallèle à la rainure de la règle, le bras D joue le rôle du bras moteur d'un planimètre linéaire ordinaire. La roulette intégrante E tournera donc d'un angle ω_1 qui mesurera l'aire de la courbe.

Pendant ce temps, chacune des deux roues a été entraînée par son secteur respectif de telle sorte que, quand le bras moteur tournait d'un angle α, la roue de centre O_2 tournait de 2α, et la roue de centre O_3 de 3α.

D'après ce que nous savons, l'appareil est construit de façon que, quand α est nul, les axes des roulettes appartenant aux roues de centre O_2 et O_3, sont respectivement perpendiculaire et parallèle à xx'.

Dans ces conditions, les angles ω_2, ω_3 dont elles auront

respectivement tourné mesureront les intégrales

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx, \qquad \int \sin 3\alpha\, dx,$$

et, à l'aide des formules indiquées pour chaque appareil, on pourra calculer le moment statique et le moment d'inertie de la courbe par rapport à xx'.

L'instrument est complété par deux réglettes d'égale longueur, servant à assurer le parallélisme de la règle avec l'axe par rapport auquel on veut prendre les moments. A cet effet, chaque réglette porte à une extrémité un talon à biseau qu'on introduit dans la rainure BB', et à l'autre extrémité une pointe. Les deux réglettes étant mises en place, on dispose alors la règle de façon que les pointes viennent se poser sur l'axe choisi.

Le bras moteur porte en général trois traçoirs, celui de l'extrémité étant fixe, les deux autres mobiles. Leur emploi est subordonné aux dimensions de la courbe. On utilise pour chacun d'eux des formules différentes, indiquées d'avance.

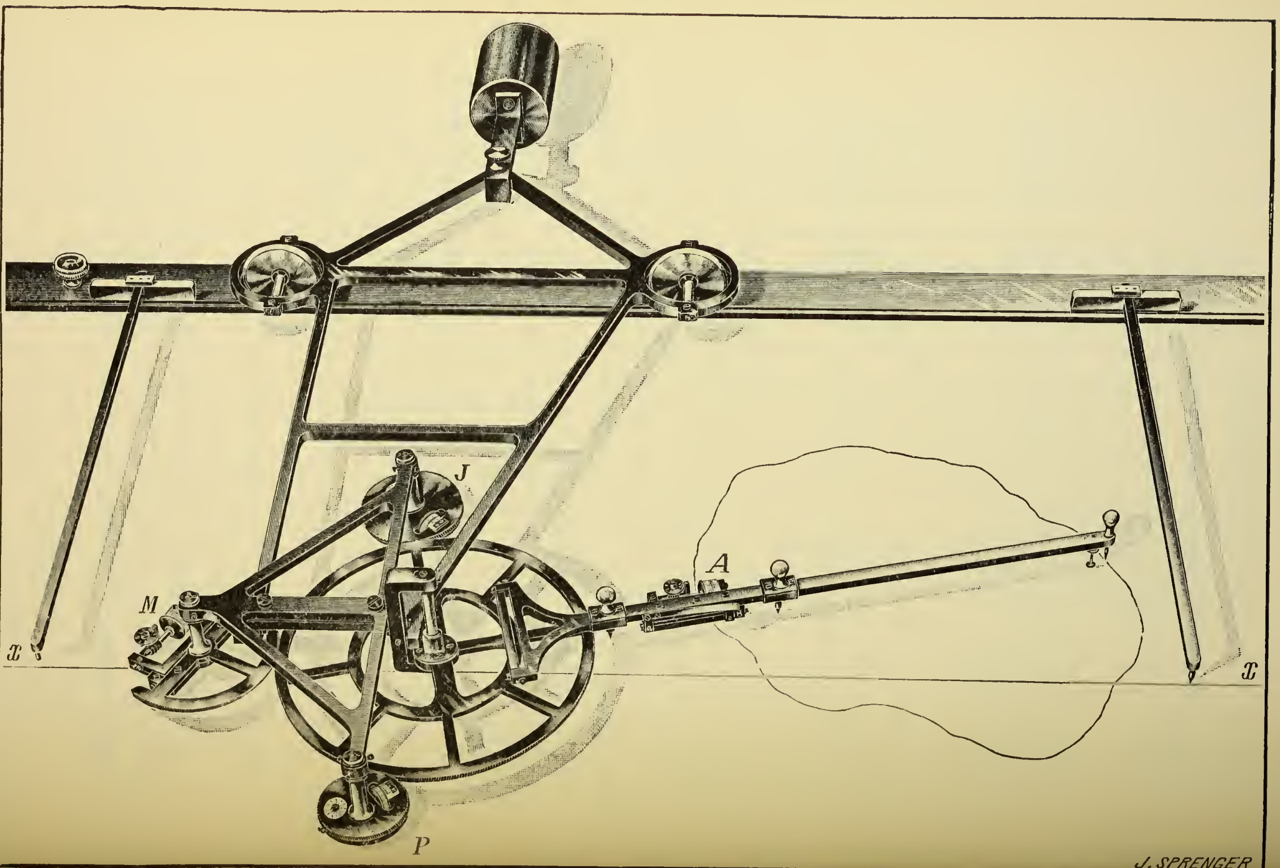
Enfin un poids P permet d'équilibrer l'appareil autour de la ligne de roulement des roulettes R.

INTÉGROMÈTRE D'AMSLER DONNANT LA VALEUR DE L'INTÉGRALE

$$\int y^4\, dx.$$

Cet intégromètre, dont la figure 63 donne une vue d'ensemble, est identique comme dispositions générales à celui que nous venons de décrire. Il n'en diffère

Fig. 63.



que par l'adjonction d'une quatrième roulette intégrante montée sur une roue R_4 entraînée, avec les roues R_2 et R_3, par le cercle solidaire du bras moteur.

La disposition est la suivante :

Le cercle de centre O_1 (*fig.* 64), mobile avec le bras moteur, ne pouvant commodément recevoir trois secteurs dentés de rayons différents, porte sur toute sa circonférence une denture de rayon uniforme r. Les roues R_2, R_3, R_4, de centres O_2, O_3, O_4, ont au contraire des rayons respectivement égaux à

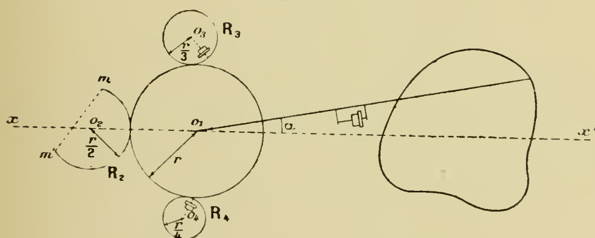
$$\frac{r}{2}, \quad \frac{r}{3}, \quad \frac{r}{4}.$$

Il en résulte que si le cercle moteur tourne autour de O_1 d'un angle α, les roues R_2, R_3, R_4 tourneront autour de leurs centres d'angles respectivement égaux à

$$2\alpha, \quad 3\alpha, \quad 4\alpha.$$

D'après ce qui a déjà été dit, l'appareil est construit de telle sorte que, si l'angle α du bras moteur avec l'axe des x

Fig. 64.



est nul, l'axe de la roulette intégrante de la roue R_3 est parallèle à xx', tandis que les axes des roulettes de R_2 et R_4 lui sont perpendiculaires.

Elles tourneront alors d'angles ω_2, ω_3, ω_4, tels que

$$\rho\omega_2 = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx,$$

$$\rho\omega_3 = \int \sin 3\alpha \, dx,$$

$$\rho\omega_4 = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) dx.$$

Le bras moteur porte, comme dans l'intégromètre précédent, trois traçoirs, et les formules à employer suivant les cas sont indiquées pour chaque appareil.

La roue R_2 ne forme pas un cercle complet. On ne conserve que la portion de circonférence nécessaire pour que la roue reste en prise avec la roue motrice, quand le bras moteur a atteint son déplacement latéral maximum à droite ou à gauche de xx'. En désignant par Φ ce déplacement total, la portion de circonférence conservée mm' doit donc correspondre à un angle au centre légèrement supérieur à $2\,\Phi$.

Intégromètres de Helle-Shaw.

APPAREIL DE LA MAISON CORADI.

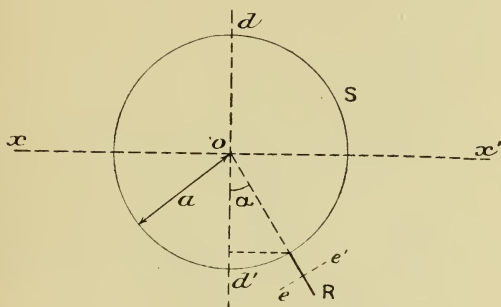
La maison Coradi a construit un intégromètre dû au professeur Helle-Shaw de Liverpool, dans lequel les roulettes intégrantes ne reposent plus directement sur la feuille du dessin, mais sont entraînées par la rotation de sphères avec lesquelles elles sont constamment en contact.

Considérons (*fig.* 65) une sphère S, qui, dans un mouvement de translation suivant xx' tourne en même temps autour de son diamètre horizontal dd' perpendiculaire

à xx' d'un angle $d\Psi$ proportionnel à dx, et une roulette intégrante R mobile autour du centre O, située dans un plan méridien et dont le point de contact soit sur un grand cercle horizontal.

Quand la sphère aura tourné de $d\Psi$ autour de son dia-

Fig. 65.



mètre dd', la roulette aura tourné autour de son axe ee' de $d\omega$, tel que

$$\rho\, d\omega = a \sin\alpha\, d\Psi,$$

et, comme $d\Psi$ est proportionnel à dx,

$$\rho\, d\omega = a \sin\alpha\, \mathrm{K}\, dx = \mathrm{K}' \sin\alpha\, dx.$$

Supposons que cette roulette soit solidaire d'un bras moteur parallèle à son axe ee' et mobile autour du point O. Si, avec un traçoir fixé à ce bras, on suit le contour d'une courbe fermée, la roulette permettra d'enregistrer la valeur de l'intégrale

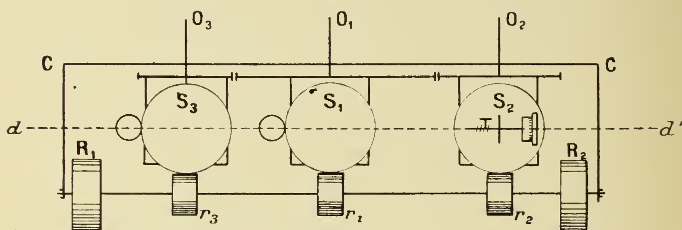
$$\int \sin\alpha\, dx,$$

et par suite on pourra évaluer l'aire A de la courbe.

L'appareil est disposé pour donner l'aire, le moment

statique et le moment d'inertie d'une courbe par rapport à un axe. Il comporte donc trois systèmes intégrateurs à sphères (*fig*. 66). Ces derniers sont constitués par trois cadres entourant leur sphère respective et mobiles autour d'un axe vertical passant par l'axe de la sphère. Chacun d'eux est muni d'une roulette intégrante et d'une roue-

Fig. 66.



compteur. L'axe du milieu O_1 est en même temps l'axe de rotation du bras moteur qui est vissé sur la plaque de base du système intégrateur S_1. Chaque cadre porte à sa partie supérieure une roue dentée; la roue du milieu engrène avec les deux autres, et leurs rayons sont respectivement égaux à

$$r, \quad \frac{r}{2}, \quad \frac{r}{3}.$$

Tout l'ensemble est placé sur un chariot formé d'un cadre C reposant sur un axe muni de deux rouleaux R_1, R_2. Cet axe porte en outre trois rouleaux de diamètre moindre, r_1, r_2, r_3 entraînant la rotation des sphères autour de leur diamètre horizontal dd'.

Si l'on déplace le chariot parallèlement à l'axe des x, les trois sphères tournent autour de dd' d'angles égaux, proportionnels à dx. En suivant alors avec le traçoir du bras

moteur le contour d'une courbe fermée, le cadre du sys-

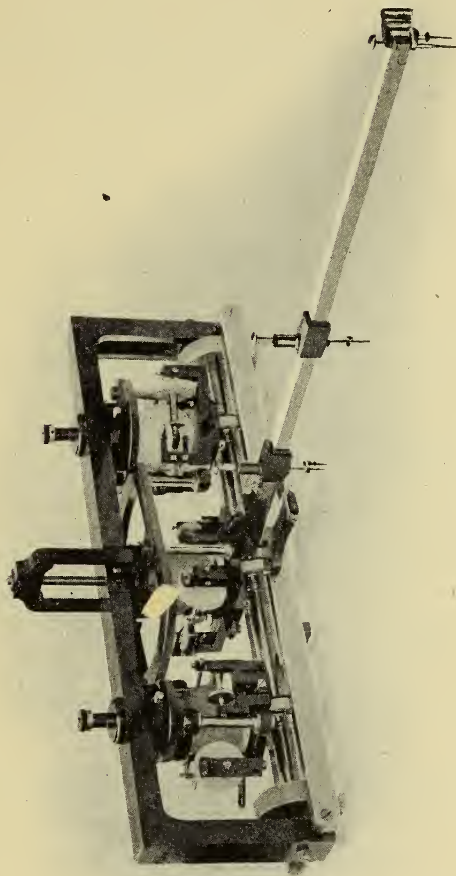


Fig. 67.

tème intégrateur S_1 tourne autour de O_1, pendant que les

cadres de S_2 et de S_3 tournent autour de O_2 et de O_3 d'angles respectivement doubles et triples de celui dont a tourné S_1.

Les roulettes intégrantes, entraînées dans ces mouvements, enregistreront donc les intégrales

$$\int \sin\alpha\, dx,$$
$$\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx,$$
$$\int \sin 3\alpha\, dx.$$

Comme dans les intégromètres d'Amsler, l'axe de la roulette des moments est perpendiculaire à l'axe des x quand le bras moteur est parallèle à ce dernier. Les roulettes des systèmes S_1 et S_3 ont alors leurs axes également parallèles à xx'.

Les trois sphères sont des boules de verre d'un poli mat, dont l'exécution est aussi soignée que possible; elles roulent sur billes dans leurs cadres, et les rouleaux r_1, r_2, r_3 sur lesquels elles reposent sont en celluloïde.

Les roulettes ne se déplaçant pas sur le plan lui-même, les erreurs dues aux inégalités et aux plis du papier sont éliminées.

En outre les mouvements de glissement sont supprimés.

AUTRE APPAREIL DE HELLE-SHAW.

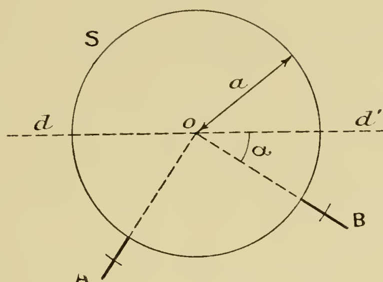
Helle-Shaw a donné d'autres appareils, en particulier un intégromètre dans lequel le principe sphère et roulette est utilisé de la façon suivante :

Soient une sphère S (*fig.* 68) mobile autour d'un de

ses diamètres horizontaux d, d', et deux roulettes A, B ayant leur point de contact sur un grand cercle horizontal de la sphère, et situées dans des plans méridiens.

Ces deux roulettes, reliées par un cadre qui maintient

Fig. 68.



leurs plans rectangulaires, peuvent tourner autour d'un axe vertical passant par le centre O.

Soient $d\theta$, dx, dy les déplacements angulaires de la sphère autour de $d\,d'$, et des roulettes A et B autour de leurs axes. On a

$$\rho\, dx = a \cos\alpha\, d\theta,$$
$$\rho\, dy = a \sin\alpha\, d\theta,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \tang\alpha.$$

La roulette B développe la longueur

$$\rho \int \tang\alpha\, dx,$$

et elle permet d'évaluer l'intégrale

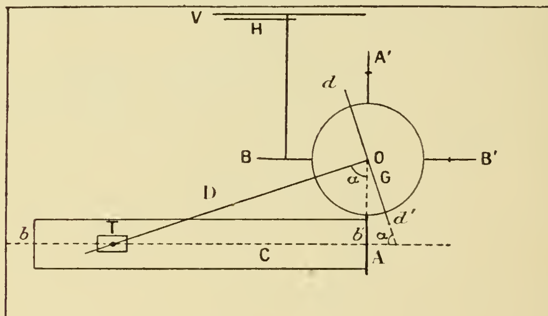
$$\int \tang\alpha\, dx.$$

Si donc un mécanisme est disposé de telle sorte qu'en suivant le contour d'une courbe fermée, l'ordonnée soit constamment proportionnelle à tang α tandis que la roulette tourne d'une quantité proportionnelle à dx, la roulette B par sa rotation enregistrera une quantité proportionnelle à l'aire de la courbe.

Pratiquement, dans l'appareil réalisé par Helle-Shaw, le cadre des roulettes est fixe et c'est la sphère qui est mobile autour de l'axe vertical passant par O ; il est évident que les mouvements relatifs de la sphère et des roulettes restent les mêmes, et que tout ce qui a été dit précédemment subsiste.

L'appareil, représenté schématiquement (*fig.* 69), com-

Fig. 69.



prend un cylindre C mobile autour de son axe horizontal bb' et sur lequel est enroulée la feuille de dessin, la direction des ordonnées étant parallèle à celle des génératrices. La sphère est maintenue entre quatre roulettes A, B, A', B', et son axe dd' tourne dans les coussinets d'un collier G mobile autour de l'axe vertical passant par O et

porté par une pièce fixée au socle de l'appareil. Ce collier est solidaire d'un bras D perpendiculaire à dd' et s'engageant dans un manchon à tourillons T qui se déplace le long d'une tringle parallèle aux génératrices du cylindre, quand le collier de la sphère tourne autour de O.

Ce manchon porte un traçoir avec lequel on suit constamment le point de la courbe passant sur la génératrice supérieure du cylindre.

Si l'on désigne par α l'angle de dd', axe de rotation de la sphère, avec la direction des génératrices du cylindre, on voit que l'ordonnée y de la courbe est proportionnelle à $\operatorname{tang}\alpha$.

Si alors on fait tourner le cylindre autour de son axe, la roulette A tourne d'un angle proportionnel à dx et entraîne la sphère qui à son tour produit la rotation de B autour de son axe.

D'après ce que nous savons, cette dernière enregistrera l'intégrale

$$\int \operatorname{tang}\alpha \, dx.$$

Les lectures se font sur un cadran vertical V devant lequel se déplace une aiguille H fixée sur le prolongement de l'axe de la roulette B.

Si maintenant on dispose une seconde sphère dont l'axe de rotation soit perpendiculaire à celui de la première, et si cette sphère est entraînée par la roulette B comme la première l'était par A, une roulette B_1 perpendiculaire à B enregistrera l'intégrale

$$\int \operatorname{tang}^2\alpha \, dx,$$

puisqu'il suffit, pour avoir la rotation de B_1, de multiplier celle de B par tang α. Cette dernière roulette permettra donc de calculer le moment statique de la surface par rapport à un axe parallèle à l'axe des x, puisque tang α est toujours proportionnel à y.

D'une façon générale, considérons p sphères disposées de telle sorte qu'une sphère de rang k ait son axe de rotation perpendiculaire à celui de la sphère de rang $k-1$; la roulette-enregistreuse de la sphère $k-1$, c'est-à-dire la $k^{\text{ième}}$ roulette, donnant l'intégrale

$$\int \text{tang}^{k-1}\alpha\, dx,$$

la roulette-enregistreur de la sphère k qui est par conséquent la $(k+1)^{\text{ième}}$ roulette du système, donnera l'intégrale

$$\int \text{tang}^{k}\alpha\, dx;$$

k étant quelconque, la $(p+1)^{\text{ième}}$ roulette, la dernière par conséquent, enregistrera l'intégrale

$$\int \text{tang}^{p}\alpha\, dx.$$

Pratiquement, l'intégromètre de Helle-Shaw est construit pour calculer soit l'aire d'une surface, soit l'aire, le moment statique et le moment d'inertie par rapport à un axe.

Dans ce dernier cas, les trois sphères, maintenues par leurs roulettes, sont montées sur un chariot qui peut se mouvoir parallèlement à Ox. Le collier de la première sphère est solidaire d'une tige perpendiculaire à son axe

de rotation et s'engageant, à son autre extrémité, dans un manchon à tourillons portant un traçoir qui se déplace parallèlement à Oy.

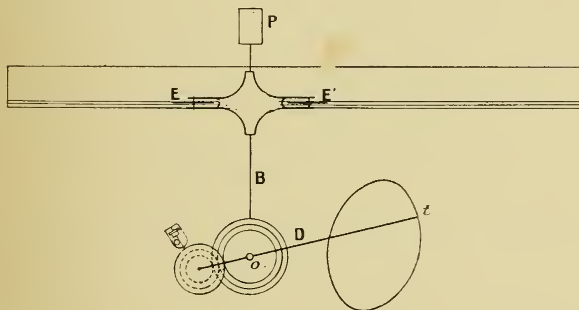
La feuille de dessin étant étendue sur une surface plane, on déplace l'appareil parallèlement à l'axe des x, en suivant la courbe avec le traçoir.

Intégromètre Marcel Desprez.

Cet appareil présente cette particularité de n'avoir qu'une seule roulette qui effectue successivement les différentes opérations d'intégration.

Dans son ensemble, il comporte un chariot se déplaçant parallèlement à une direction fixe, pendant que le traçoir

Fig. 70.



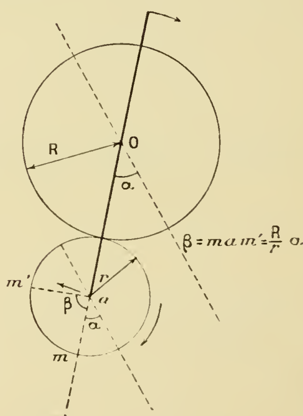
d'un bras articulé en un point du chariot suit le contour de la courbe.

Le point d'articulation décrivant une ligne droite, l'intégromètre se rattache donc à la catégorie des appareils linéaires.

Le chariot repose sur deux roulettes à bords minces E, E′ pouvant rouler dans la rainure d'une règle métallique qu'on dispose sur la feuille de dessin (*fig.* 70). Il est solidaire d'un bras B, perpendiculaire au chemin de roulement et portant à son extrémité un axe vertical autour duquel tourne le bras moteur. Ce bras D porte le traçoir *t* et se prolonge au delà de O par une partie rectiligne à laquelle est fixé un axe vertical *a*. La roulette intégrante est portée par un étrier qui est mobile autour de cet axe, et peut recevoir par rapport au bras moteur diverses orientations de la façon suivante :

L'axe d'articulation O du bras moteur porte trois roues folles, qui peuvent être rendues successivement solidaires

Fig. 71.



de la tige B par une goupille s'engageant dans un trou pratiqué dans leur épaisseur et traversant une pièce solidaire de l'axe O dirigée suivant un rayon.

L'axe *a* porte trois roues solidaires, de diamètres dif-

férents, pouvant engrener respectivement avec les trois roues précédentes.

On a donc un système planétaire (*fig.* 71).

Lorsque le bras moteur aura tourné de α, un point quelconque de la roue satellite aura un déplacement angulaire θ égal à α augmenté de β, tel que

$$\beta r = \alpha R,$$

cette dernière roue ayant tourné sur elle-même en roulant sur la circonférence de centre O.

Donc

$$\theta = \alpha + \alpha \frac{R}{r} = \alpha \left(1 + \frac{R}{r} \right).$$

Par suite l'étrier et l'axe de la roulette ont tourné de la même quantité. Par conséquent si le rapport $\frac{R}{r}$ est égal successivement à 1, 2, 3, on aura

$$\theta = 2\alpha, \qquad \theta = \text{[illegible]}, \qquad \theta = 4\alpha,$$

et l'on pourra obtenir la valeur des intégrales

$$\int y^2\, dx, \quad \int y^3\, dx, \quad \int y^4\, dx.$$

Dans l'appareil, le rapport $\frac{R}{r}$ prend les valeurs 1, 2, 3 en partant du train supérieur.

Si aucune roue n'est immobilisée, un doigt fixé à la roue inférieure du train central vient buter contre un arrêt de la tige motrice. L'axe de la roulette intégrante est alors, par construction, parallèle à cette tige, et l'appareil, fonctionnant comme un planimètre linéaire, donne la valeur des aires.

Un ressort spiral, disposé au centre de l'équipage satellite, supprime les temps perdus dans les transmissions d'engrenage.

Enfin l'appareil repose sur la feuille de dessin par une roulette, placée sous le train central, parallèle aux deux roues E, E', et constituant avec elles le troisième point d'appui du chariot. Un contre-poids P équilibre l'ensemble autour de la ligne de roulement.

CHAPITRE III.

LES INTÉGRAPHES.

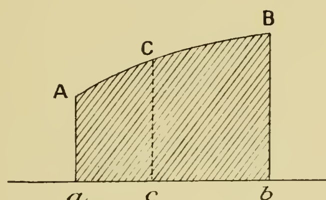
Généralités.

Les appareils étudiés précédemment donnent la valeur soit de l'aire, soit du moment statique ou d'inertie d'une surface comprise à l'intérieur d'un contour fermé. Le résultat s'obtient par la connaissance de deux nombres qu'on lit au compteur de l'appareil, et une fois la lecture faite, il ne reste plus trace de l'opération.

Si, après avoir calculé une aire AaBb, on veut obtenir l'aire AaCc limitée, par exemple, à l'ordonnée Aa et à une ordonnée intermédiaire Cc comprise entre les ordonnées extrêmes, on est obligé d'effectuer une nouvelle mesure, et il faudra, en général, recommencer l'opération autant de fois qu'on voudra déterminer de valeurs différentes pour les quantités en question.

Les intégraphes ont pour but de mesurer l'aire d'une courbe et de tracer une courbe représentative de la variation de cette aire. Cette courbe est la courbe intégrale de la courbe donnée. Ces appareils permettent donc de voir rapidement comment varient les quantités qu'on évalue, et, une fois l'opération terminée, de relever une mesure en un point quelconque de la courbe tracée.

Fig. 72.



Les intégraphes peuvent donc être considérés comme étant des appareils enregistreurs. Ils ont par rapport aux intégromètres l'inconvénient d'être en général moins précis, car le trait peut présenter des irrégularités et a toujours une épaisseur qui laisse une certaine indécision dans l'appréciation des longueurs à relever.

LES COURBES INTÉGRALES.

Nous rappelons ici quelques-unes des principales propriétés des courbes intégrales, dont l'emploi permet de résoudre rapidement de nombreux problèmes où l'intégration graphique peut être avantageusement substituée aux méthodes ordinaires du calcul direct ([1]).

([1]) Il ne nous est pas possible, sans sortir du cadre de cet ouvrage, d'étudier les cas multiples où la courbe intégrale et par suite les inté-

Courbes différentielles et courbes intégrales.

Soit ABC (*fig.* 73) une courbe donnée dont l'équation est supposée résolue par rapport à y

$$y = f(x).$$

On sait que l'aire aA Bb comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées d'abscisses a et b, a pour expression

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Construisons alors une courbe en portant, à partir d'une droite quelconque parallèle à Ox, et sur chaque ordonnée de la courbe ABC, des longueurs proportionnelles à l'aire limitée à cette ordonnée, telles que

$$\mathrm{KY} = \int_a^x f(x)\,dx.$$

On a une courbe A′B′C′ qui est la courbe intégrale directe du premier ordre de la courbe donnée.

Au lieu de considérer l'aire comprise entre la courbe et

---

graphes, trouvent leur application. La brochure déjà citée d'Abdank-Abakanowiez en contient plusieurs exemples. Nous citerons en particulier : l'étude de nombreux problèmes de résistance des matériaux et la théorie des voûtes, la résolution des équations numériques de degré quelconque, la détermination de la résistance des trains à l'aide du pendule d'inertie de M. Desdouits, l'étude des problèmes de déplacement et de stabilité, en architecture navale. On pourra consulter également sur ce dernier sujet la *Théorie du Navire* de MM. Pollard et Dudebout, Tome I (Gauthier-Villars, 1890) et une communication faite par J.-G. Johnstone à la 48e session de l'*Institut of Naval Architects.*, 22 mars 1907.

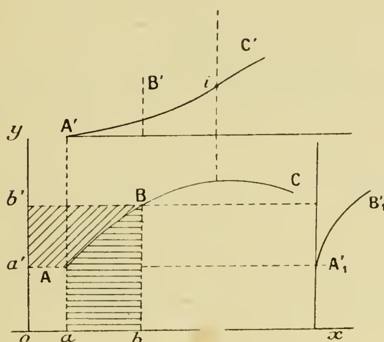
l'axe des x, on peut considérer l'aire $a'ABb'$, comprise entre l'axe des y, la courbe et des droites parallèles à Ox.

L'expression de cette aire est

$$A_1 = \int_{a'}^{b'} x\,dy,$$

et, en construisant une courbe ayant mêmes ordonnées

Fig. 73.



que la courbe ABC et dont les abscisses sont respectivement X, telles que

$$KX = \int_{a'}^{y} x\,dy,$$

on a une deuxième courbe intégrale qui est la courbe intégrale complémentaire du premier ordre de ABC.

Les courbes $A'B'C'$, $A'_1B'_1$ ont de même chacune deux courbes intégrales. Donc en tout quatre courbes intégrales du deuxième ordre pour la courbe donnée ABC.

On peut construire par les mêmes procédés des courbes intégrales du troisième et du quatrième ordre.

Les définitions précédentes permettent de mettre en

lumière un certain nombre de propriétés des courbes intégrales, dont la démonstration est immédiate.

I. *Le coefficient angulaire en un point de la courbe intégrale est proportionnel à l'ordonnée correspondante de la courbe* ABC.

En effet, soit

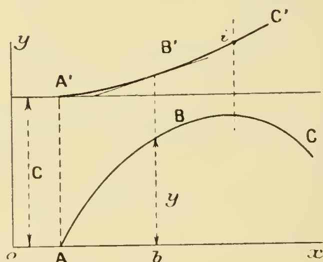
$$KY = \int f(x)\,dx + C,$$

l'équation de la courbe intégrale.

Le coefficient angulaire de la tangente en un point est

$$K\frac{dY}{dx} = f(x) = y, \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{y}{K}.$$

Fig. 74.



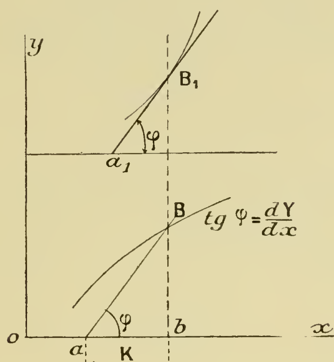
De même, il est évident que le coefficient angulaire en un point de l'intégrale complémentaire est proportionnel à l'abscisse de la courbe donnée.

Il résulte de cette première proposition que si, pour chaque point B de la courbe donnée, on porte à partir du pied b de l'ordonnée, suivant l'axe des x et dans le sens négatif, une longueur $= K$, la droite aB est parallèle à la

tangente au point B_1 correspondant de la courbe intégrale directe (*fig.* 75).

C'est cette propriété de la droite aB, appelée *directrice*,

Fig. 75.



que nous trouverons utilisée dans la construction des intégraphes.

Zmurko a également indiqué un procédé rapide pour la construction de la courbe intégrale en la considérant comme l'enveloppe des droites telles que a_1B_1 (¹).

II. *La courbe intégrale directe du premier ordre d'une droite parallèle à* Ox *est une droite inclinée passant par l'origine.*

En effet, soit $y = a$ l'équation de cette droite ; celle de la courbe intégrale est

$$Y = \int a\,dx = ax + c.$$

(¹) ABDANK-ABAKANOWICK, *Les intégraphes et la courbe intégrale.*

La constante c est nulle, car pour $x = 0$, $Y = 0$, donc

$$Y = a x.$$

III. *La courbe intégrale du premier ordre d'une droite inclinée passant par l'origine est une parabole du second degré, ayant pour axe, l'axe des y.*

Soit en effet $y = a x$, l'équation de cette droite; celle de la courbe intégrale sera

$$Y = \int y\, dx = \int a x\, dx = \frac{1}{2} a x^2 + C.$$

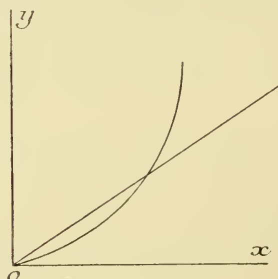
C est nul, donc

$$Y = \frac{1}{2} a x^2.$$

ce qui démontre la proposition.

De même, la courbe intégrale de la parabole précédente

Fig. 76.



est une courbe du troisième degré passant par l'origine où elle présente un point d'inflexion et a pour tangente l'axe des x, etc.

IV. *Si la courbe donnée présente des points à tan-*

gente horizontale, les points correspondants de la courbe intégrale sont des points d'inflexion.

En effet, l'équation de la courbe intégrale étant

$$Y = \int y\, dx + C,$$

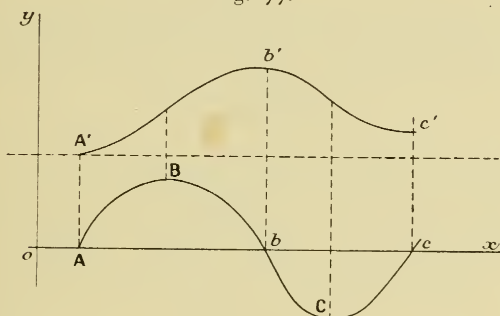
si ces points ne sont pas des points singuliers, on a

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

On voit également que si la courbe ABC coupe l'axe des x en des points A, b, c, les points correspondants de la courbe intégrale ont leur tangente horizontale (*fig.* 77).

Fig. 77.



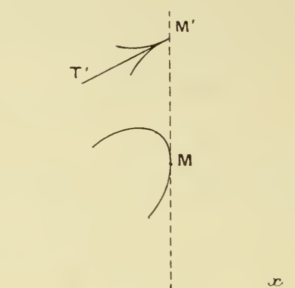
En effet, le coefficient angulaire de la tangente en ces points est

$$\frac{dY}{dx} = y = 0.$$

V. *Si la courbe donnée a une tangente parallèle à* Oy, *l'intégrale présente au point correspondant un point de rebroussement.*

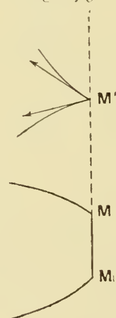
En effet, dans le voisinage du point M′ la courbe intégrale aura deux branches aboutissant en ce point ; elles auront évidemment même tangente M′T′ puisque le coefficient angulaire est égal à l'ordonnée de M.

Fig. 78.



Si, au lieu d'avoir une tangente parallèle à Oy, la courbe comprend une portion de droite MM_1, la courbe inté-

Fig. 79.



grale a deux branches aboutissant en M′ qui est un point anguleux.

La différence des coefficients angulaires des tangentes est égale à MM_1.

On voit également qu'à un changement brusque dans l'inclinaison de la courbe donnée correspond pour l'intégrale une variation brusque de la courbure.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES COURBES INTÉGRALES. MOMENT STATIQUE ET CENTRE DE GRAVITÉ.

Le moment statique de l'aire de la courbe ABC par rapport à un axe KK′ parallèle à Oy et d'abscisse a, est égal à l'aire de la courbe intégrale du premier ordre limitée à cet axe, ou à l'ordonnée correspondante de la courbe intégrale seconde (*fig.* 80).

En effet, soit $y\,dx$ un élément de l'aire ABC; son moment par rapport à KK′ est

$$(a-x)\,y\,dx$$

et le moment total

$$\int (a-x)\,y\,dx.$$

Or $y\,dx$, étant un élément de l'aire ABC, est représenté par un élément dy_1 de l'ordonnée $C'C'_1$ de la courbe intégrale; cet élément multiplié par $(a-x)$ sera donc un élément de l'aire $A'B'C'C'_1$ de la courbe intégrale.

L'intégrale

$$\int (a-x)\,y\,dx = \int (a-x)\,dy_1$$

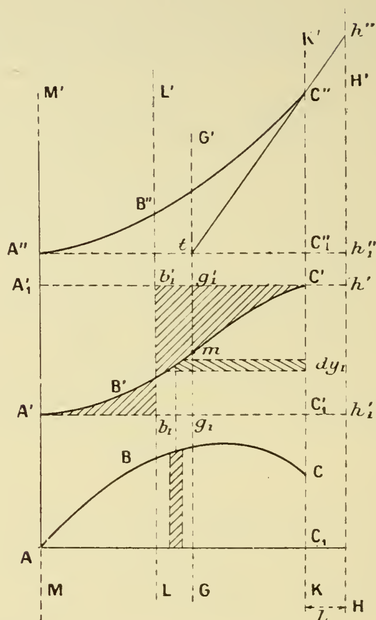
est donc égale à l'aire $A'B'C'C'_1$.

Traçons maintenant la courbe intégrale seconde $A''B''C''$. L'ordonnée $C''C''_1$ représente l'aire $A'B'C'C'_1$, c'est-à-dire le moment de l'aire $ABCC_1$ par rapport à KK′.

On démontrerait de même que le moment de $ABCC_1$ par

rapport à MM' est représenté par l'aire $A'_1C'B'A'$, ou par l'abscisse correspondante de la courbe intégrale complémentaire de $A'B'C'$.

Fig. 80.



Par rapport à un axe tel que HH', le moment de $ABCC_1$ aura pour expression

$$\int [(a-x)+l] y\,dx = \int (a-x) y\,dx + l \int y\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\text{aire } A'B'C'C'_1 + \text{aire } C'h'h'_1C'_1,$$

ou encore l'ordonnée h''_1h'' prolongée jusqu'à sa rencontre avec la tangente en C'' à la courbe intégrale seconde.

Enfin pour un axe quelconque LL′, le moment de l'aire $ABCC_1$ est égal à la somme algébrique des aires hachurées comprises entre la courbe $A'B'C'$, l'axe LL′ et les deux droites $A'C'_1$, A'_1C'. Si cette somme est nulle le centre de gravité de l'aire $ABCC_1$ est situé sur LL′.

Il est facile de voir que cet axe passe alors par le point t où la tangente en C'' à la courbe intégrale seconde rencontre la droite $A''C''_1$.

En effet, soit GG′ la nouvelle position de LL′. $C''t$ est l'intégrale de la droite A'_1C'; par conséquent $C''C''_1$ représente l'aire du rectangle $g'_1C'C'_1g_1$. Or, $C''C''_1$ représentant aussi l'aire $A'B'C'C'_1$, on a

$$\text{aire du rectangle } g'_1C'C'_1g_1 = \text{aire } A'B'C'C'_1$$

et, comme elles comportent une partie commune,

$$\text{aire } A'mg_1 = \text{aire } C'mg'_1.$$

Cette propriété des courbes intégrales du premier et du deuxième ordre permet de déterminer facilement la position du centre de gravité d'une aire plane quelconque

MOMENT D'INERTIE.

Proposons-nous d'obtenir graphiquement le moment d'inertie de l'aire $ABCC_1$, par rapport à l'axe KK′ (*fig.* 81).

Le moment d'inertie d'un élément $y\,dx$ de cette surface est

$$(a-x)^2 y\,dx,$$

et pour toute la surface son expression est donnée par l'intégrale

$$\int (a-x)^2 y\,dx.$$

Traçons les courbes intégrales du premier et du deuxième ordre de la courbe ABC.

L'ordonnée $C'' C_1'''$ représentant l'aire de la courbe $A'C'$, chaque élément dy_2 représentera un élément de cette aire

Fig. 81.

c'est-à-dire un élément du moment statique; en le multipliant par $(a-x)$, on aura un élément du moment d'inertie. Pour avoir l'abscisse correspondant à cet élément, menons des extrémités de dy_2 deux tangentes à la courbe $A'' C''$: en traçant les verticales passant par les

points de contact, on a l'élément correspondant $y\,dx$; le $(a-x)$ de cet élément est la distance du point m de rencontre des tangentes à l'axe KK'.

Or l'aire du triangle de sommet m et ayant pour base dy_2 est

$$\frac{1}{2}(a-x)\,dy_2 = \frac{1}{2}(a-x)^2 y\,dx,$$

c'est-à-dire représente la moitié du moment d'inertie de l'élément $y\,dx$ par rapport à l'axe KK'.

L'aire totale $A''C''C''_1$ représente donc la moitié du moment d'inertie de la surface ACC_1.

De même $A''T$ représente l'aire $A'C'E$, c'est-à-dire le moment statique de ACC_1 par rapport à MM' et l'aire $A''TC''$ la moitié du moment d'inertie par rapport au même axe.

Enfin le moment d'inertie de la surface $ABCC_1$ par rapport à un axe tel que LL' est représenté par deux fois la somme des aires $A''ab$ et acC'', et par rapport à un axe HH' en dehors de la figure, par deux fois l'aire $A''C''_1h''_1h''C''$.

Si maintenant on veut obtenir les moments d'inertie sous forme de longueur, il faut avoir recours aux courbes intégrales du troisième ordre.

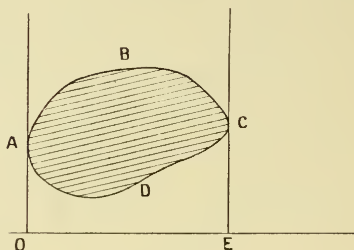
La courbe intégrale de $A''C''$ est une courbe telle que $A'''C'''$, et la courbe intégrale de $C''T$ une parabole tangente en C''' à $A'''C'''$ et ayant son sommet sur la verticale du point i, intersection des droites $A''C''_1$ et $C''T$.

Le moment d'inertie de la surface $ABCC_1$ par rapport à KK' est représenté par l'ordonnée $C'''C'''_1$, et par rapport à LL' par la partie de cet axe comprise entre la droite $A'''C'''_1$ et la courbe A'''_1C'''.

CAS DES COURBES FERMÉES.

Si la surface, au lieu d'être limitée à une ordonnée, est comprise à l'intérieur d'un contour fermé ABCD, il suffit de la considérer comme la différence des deux surfaces OABCE et OADCE.

Fig. 82.



Soit alors la surface ABCD (*fig*. 83). Traçons les courbes intégrales des deux tronçons ABC et CDA. L'ordonnée $C'C'_1$ représente l'aire du contour ABCD, et l'aire $A'B'C'C'_1D'A$ son moment statique par rapport à EE'.

Pour avoir le moment par rapport à OO', il suffit de tracer, à partir de C', la courbe intégrale $C'A'_1$ de la partie CDA. L'aire $A'_1C'B'A'$ représente le moment par rapport à OO' de l'aire du contour ABCD.

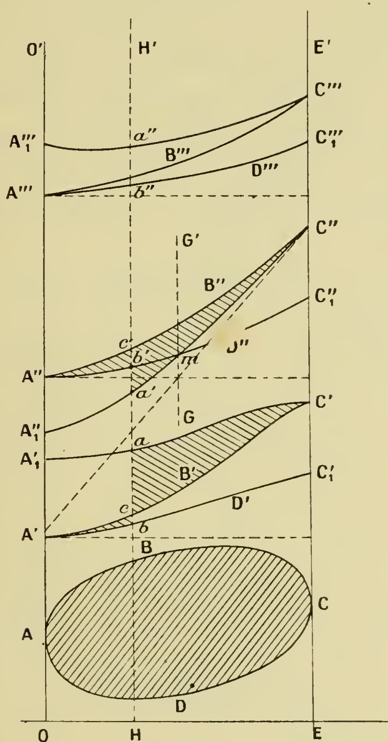
Pour avoir les moments d'inertie, traçons les courbes intégrales du deuxième ordre.

L'aire du contour $A''C''C''_1$ représente la moitié du moment d'inertie de la surface ABCD par rapport à EE', et l'aire $A''C''A''_1$ la moitié du moment d'inertie par rapport à OO'.

Si l'on trace les courbes intégrales du troisième ordre,

on a les moments d'inertie sous forme d'une longueur; ainsi le moment d'inertie de la surface ABCD, par rapport à EE', est représenté par le double de la longueur $C'''C_1'''$ et par rapport à OO' par le double de la longueur $A'''A_1'''$.

Fig. 83.



D'une façon générale, si l'on considère un axe quelconque HH', l'aire ABCD est représentée par le segment *ab*, le moment statique par rapport à cet axe, par la somme des aires A'*cb* et *ac*C', ou par le segment

$a'b'$; enfin, le moment d'inertie par rapport au même axe est représenté par le double de l'aire $b'A''c'C''a'b'$, ou par le double du segment $a''b''$.

L'aire $b'A''c'C''a'b'$, et par suite le moment d'inertie, est minimum quand HH' vient occuper la position GG', c'est-à-dire, d'après ce que nous savons, quand cet axe passe par le centre de gravité de la surface ABCD.

En effet, l'aire en question se réduit alors à celle de la partie $A''C''m$, la surface des triangles mixtilignes tels que $a'b'm$ s'annulant pour cette position particulière.

Si, au lieu d'une surface continue, on a affaire à des ordonnées isolées, on applique les mêmes méthodes que précédemment.

Soient alors les ordonnées Aa, Bb, Cc, par exemple. La courbe intégrale du premier ordre est un polygone $(oaAb'B''C'C''K')$ dont les côtés sont alternativement parallèles aux axes de coordonnées (*fig.* 84).

Le moment statique par rapport à l'axe vertical KK'' est égal à l'aire $aAb'B''C'C''K'K$, et, par rapport à oo', il est égal à l'aire $oaAb'B''C'C''o'o$.

Traçons la courbe intégrale du deuxième ordre; elle est constituée par une suite de droites inclinées $a\beta\gamma H$. Le segment HK représente le moment statique par rapport à KK'', et oH' le moment par rapport à l'axe oo'.

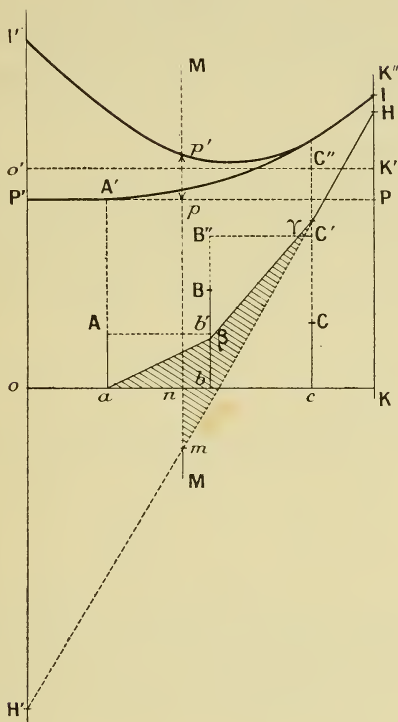
En traçant la courbe intégrale du troisième ordre A'I, on obtient les moments d'inertie.

L'ordonnée PI représente la moitié du moment d'inertie par rapport à KK''.

Enfin, par rapport à un axe tel que MM', le moment d'inertie est représenté par deux fois l'aire $mna\beta\gamma m$,

ou par le double du segment pp' compris entre la ligne PP' et la parabole II', qui est la courbe intégrale de la droite HH'.

Fig. 84.



Intégraphes.

L'idée première des intégraphes est due à Coriolis, qui en a exposé le principe, en 1836, dans le *Journal de Liouville*.

Le projet de Coriolis y est présenté de la façon suivante :

« Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre et que le frottement soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de la tangente sera toujours celle de la partie du fil, tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule.

» Si donc on peut donner au fil dans cette partie une direction qui résulte de l'équation différentielle d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre en prenant pour abscisses les angles compris sur la base du cylindre.

» Cette considération conduit à un tracé assez simple de plusieurs courbes.

» On voit de suite que l'exponentielle, dont l'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a} \qquad \text{ou} \qquad y\frac{dx}{dy} = a,$$

peut se décrire en enroulant sur un cylindre un fil tendu qui passe toujours par un point fixe. Ce point doit être à la distance a de la génératrice du cylindre, qui se trouve dans le plan tangent mené par ce point.

. . . .

« Si l'on avait l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y\,f(x)$$

ou, en posant $\frac{1}{f(x)} = \varphi(x)$,

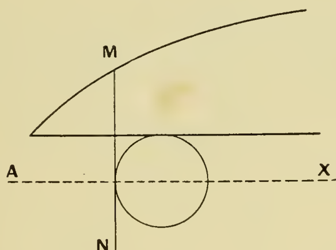
$$y\frac{dx}{dy} = \varphi(x),$$

on trouverait encore assez facilement la courbe qui répond à cette équation au moyen du relief de la courbe dont l'ordonnée est $\varphi(x)$.

» Pour cela, il suffirait d'avoir une règle AMX, dont un côté AX serait droit et l'autre AM formerait la courbe dont l'ordonnée serait $\varphi(x) - r$, r étant le rayon du cylindre.

» Ensuite, on ferait tourner le cylindre en appliquant contre sa base la règle AX. Si le fil qui s'enroule reste dans le plan vertical MN, ce qui est facile à obtenir en

Fig. 85.



l'appliquant contre un plan fixe et qu'il passe aussi sur la courbe AM en M, il est clair qu'il formera sur le cylindre une courbe telle qu'en se déroulant sur le plan, elle satisfait à l'équation différentielle ci-dessus, puisque la sous-tangente serait égale à $\varphi(x)$, x étant l'abscisse mesurée sur la base circulaire du cylindre [1]. »

Les principes qui ont été utilisés dans la construction des intégraphes sont une application directe des considérations exposées par Coriolis.

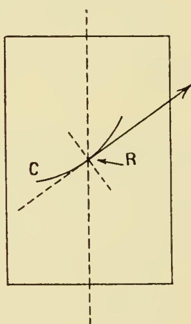
---

(1) ABDANK-ABAKANOWICZ, *Les intégraphes et la courbe intégrale.*

Supposons en effet (*fig.* 86) une roulette R, à bords minces, appliquée sur la surface du cylindre au point où le fil tendu s'en détache, et de telle sorte que son plan soit normal au plan tangent au cylindre en ce point. Si l'intersection de ces deux plans coïncide avec la direction du fil, c'est-à-dire si le plan de la roulette lui est constamment parallèle, celle-ci, dans le mouvement de rotation du cylindre, enveloppera sur sa surface la même courbe C que celle précédemment définie. Il suffit donc, à l'aide d'un mécanisme approprié, de donner à la roulette une orientation convenable, résultant de l'équation différentielle de la courbe.

Si le cylindre est remplacé par un plan, la courbe C devient l'enveloppe des traces du plan de la roulette sur

Fig. 86.



ce plan, la direction de cette dernière étant toujours déterminée par l'équation différentielle de la courbe.

Au lieu de considérer la courbe intégrale comme le lieu des points de contact d'une roulette sur la surface d'un cylindre ou d'un plan, on peut chercher à la con-

struire directement, en disposant un mécanisme à l'aide duquel un style trace une courbe dont les ordonnées soient à chaque instant égales ou proportionnelles à $\int y\,dx$. Il suffit pour cela que le style se déplace d'une quantité proportionnelle à l'angle dont a tourné la roulette intégrante d'un planimètre de Wetli, par exemple.

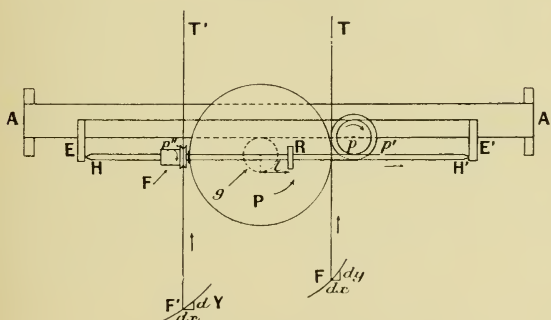
C'est d'après ce principe que Zmurko a construit son intégraphe, vers 1861.

INTÉGRAPHE DE ZMURKO ([1]).

Cet appareil est disposé de la façon suivante :

Le long d'une règle AA', placée parallèlement à l'axe des x, se meut un disque P orizontal, mobile autour de l'axe vertical passant par son centre.

Fig. 87.



Ce mouvement est commandé par un galet g solidaire du disque et roulant contre la règle.

([1]) Décrit en 1884, dans le « Cosmos ».

Deux tiges T, T′, parallèles à l'axe des y, sont situées de part et d'autre du disque et portent chacune un traçoir, l'un servant à suivre le contour de la courbe donnée, l'autre devant tracer sa courbe intégrale.

La tige T porte un fil tendu, enroulé sur une poulie p', solidaire elle-même d'une seconde poulie p.

Une tige HH′, parallèle à xx', est fixée à ses deux extrémités dans des paliers supports EE′ et peut recevoir un mouvement de translation suivant sa direction, par l'intermédiaire d'un fil tendu s'enroulant sur p. Les bouts de ce fil sont fixés aux paliers EE′.

Cette tige porte la roulette intégrante R reposant sur le plateau et peut ainsi tourner autour de son axe; elle passe en outre sur des galets dans un fourreau F, solidaire d'une poulie p'', autour de laquelle est enroulé un fil tendu dont les extrémités sont fixées à la tige T′.

Dans son mouvement de translation parallèlement à xx', la tige HH′ peut passer librement dans le fourreau, mais si elle tourne autour de son axe, elle entraîne la rotation de ce dernier et, par suite, celle de la poulie p''. La tige T′ se déplace alors parallèlement à yy'.

Le mouvement élémentaire du traçoir F peut être ramené à deux déplacements élémentaires dx et dy; de même celui de F′ peut être ramené au même déplacement dx et à un autre dY.

Calculons la valeur de ce dernier.

Donnons à F le déplacement dy; la poulie p', de rayon r', tourne de dy, tel que

$$dy = r'\,d\varphi \qquad \text{ou} \qquad d\varphi = \frac{dy}{r'}.$$

La poulie p, de rayon r, ayant tourné du même angle, imprime à la tige HH′ un mouvement dl parallèle à xx', dont la valeur est

$$dl = r\,d\varphi.$$

$$(1)\qquad dl = \frac{r}{r'}\,dy.$$

La distance de la roulette R au centre du disque a donc varié de cette même quantité.

Imprimons maintenant à F un mouvement parallèle à xx'; pour cela, déplaçons tout l'appareil de dx.

Le galet g, de rayon a, tourne de $d\Psi$, tel que

$$d\Psi = \frac{dx}{a}.$$

Le plateau P, ayant tour é du même angle, entraîne la roulette qui développe alors la quantité

$$\rho\,d\omega = l\,d\Psi,$$

$$\rho\,d\omega = l\frac{dx}{a}.$$

La tige HH′ et la poulie p'' tournent du même angle : soit r'' le rayon de cette dernière. La longueur de l'arc développé suivant la circonférence d'enroulement du fil représente évidemment le déplacement du traçoir F′, c'est-à-dire dY.

Or, on a

$$r''\,d\omega = \frac{lr''}{\rho}\,\frac{dx}{a},$$

d'où

$$dY = \frac{lr''}{\rho a}\,dx.$$

De l'équation (1), on tire

$$l = \frac{r}{r'} y,$$

la constante étant nulle, si l'on admet que la roulette est au centre du plateau quand $y = 0$.

On a alors

$$dY = \frac{rr''}{\rho r' a} y \, dx,$$

d'où finalement

$$Y = K \int y \, dx + K'.$$

Le style F' trace donc bien la courbe intégrale de la courbe donnée.

INTÉGRAPHE DE BOYS.

La partie essentielle de cet appareil est une roulette dont le plan reste constamment parallèle aux directrices de la courbe donnée. C'est une application directe du principe énoncé dans l'étude des courbes intégrales (propriété de la directrice).

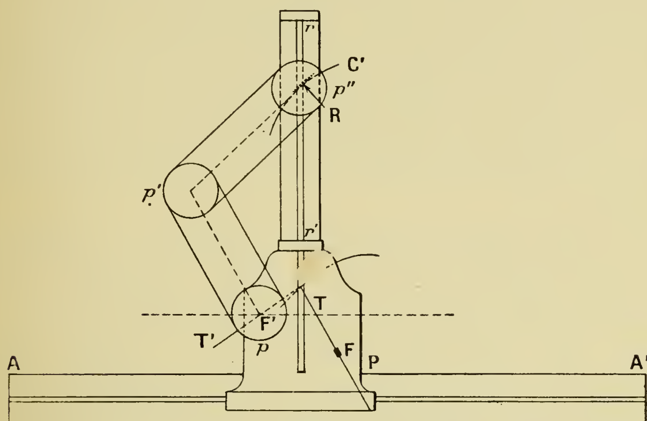
Il comporte une planchette P, qui peut se déplacer parallèlement à l'axe des x le long d'une règle AA'. Cette planchette est munie d'une fente parallèle à Oy dans laquelle glisse un traçoir avec lequel on suit le contour de la courbe; afin de le faire plus commodément, la fente est formée par la juxtaposition de deux lames de verre.

L'axe du traçoir sert en même temps d'axe d'articulation à deux tiges T, T'.

L'une, T, passe dans un fourreau articulé F; l'autre coulisse également dans un fourreau F′, fixé sous une poulie p qui commande le mouvement de la roulette R.

Cette dernière est fixée à un chariot qui peut coulisser dans une rainure rr' parallèle à Oy, et son orientation a

Fig. 88.



lieu par l'intermédiaire de trois poulies p, p', p'' de même diamètre, autour desquelles sont enroulés deux fils tendus.

Si l'axe de la poulie p est sur l'axe des x, et l'ordonnée de la courbe construite à une échelle telle que la distance du point F′ à l'axe de la fente soit prise pour unité, l'inclinaison de la tige T′ sera constamment égale à $\frac{y}{1}$. Il suffit alors que la roulette soit parallèle à T′ pour que la trace de son plan sur la feuille du dessin enveloppe la courbe intégrale C′.

INTÉGRAPHES D'ABDANK-ABAKANOWICZ.

Abdank a étudié spécialement la construction des intégraphes et a imaginé de nombreux dispositifs pour la réalisation de ces appareils.

Comme dans la plupart des intégrateurs, la partie essentielle est une roulette qui s'appuie sur une surface et peut rouler librement sans glissement en suivant toujours la direction de son plan. La condition à laquelle est assujettie cette roulette est d'avoir son plan constamment parallèle aux directrices de la courbe. Les mécanismes imaginés dans ce but peuvent donner lieu à de nombreuses combinaisons.

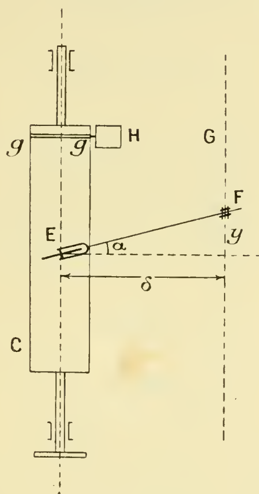
Dans les premiers appareils d'Abdank, la roulette appuyait fortement sur la génératrice supérieure d'un cylindre C sans pouvoir se déplacer le long de cette génératrice; elle était fixée dans un étrier E, solidaire d'un bras dont l'extrémité F portait un traçoir destiné à suivre le contour de la courbe donnée; ce traçoir était fixé à un double fourreau articulé pouvant glisser à la fois sur le bras et sur une tige G parallèle à Oy.

L'ensemble (cylindre C et tige G) était monté sur une planchette mobile, glissant parallèlement à l'axe des x le long d'une seconde planchette fixe disposée sur la feuille de dessin. Dans ce mouvement, le cylindre tournait autour de son axe, le long duquel il se déplaçait sous l'action de la roulette.

La rotation du cylindre était produite à l'aide d'une poulie calée sur son axe autour de laquelle s'enroulait un fil tendu entre deux supports de la planchette fixe.

Il est facile de voir que le déplacement du cylindre suivant son axe représente la variation de l'ordonnée de la courbe intégrale.

Fig. 89.



Soit ds le développement de la roulette

$$ds = \rho\, d\omega.$$

La quantité dont se déplace le cylindre parallèlement à Oy est

$$dl = ds \sin\alpha,$$

et il a en même temps tourné de $d\varphi$, tel que

$$r\, d\varphi = ds \cos\alpha.$$

Or

$$r\, d\varphi = \mathrm{K}\, dx.$$

Donc

$$\frac{ds \sin\alpha}{ds \cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha = \frac{dl}{\mathrm{K}\, dx},$$

$$dl = \mathrm{K} \operatorname{tang}\alpha\, dx.$$

En prenant pour axe des x la projection de la droite perpendiculaire à G passant par le point autour duquel pivote l'étrier E, on a

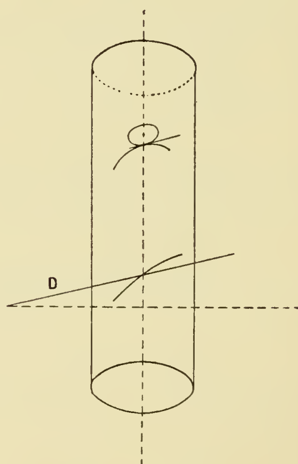
$$y = \delta \operatorname{tang} \alpha,$$

d'où finalement

$$dl = \frac{K}{\delta} y \, dx.$$

Dans ces appareils, un chariot H, entraîné par une poulie s'engageant dans une gorge gg taillée suivant une circonférence du cylindre, se déplaçait parallèlement à Oy. Un traçoir, fixé à ce chariot, décrivait la courbe intégrale.

Fig. 90.



On voit que l'ensemble, cylindre et roulette, se comporte comme un système de vis à *pas variable* dans lequel la vis, c'est-à-dire le cylindre, se déplacerait suivant son axe, tandis que l'écrou, figuré par la roulette,

serait fixe. Les filets de la vis seraient constamment parallèles aux directrices.

On peut aussi concevoir un appareil dans lequel le cylindre ne se meut pas parallèlement à yy' et reçoit seu-

Fig. 91.

lement un mouvement de rotation autour de son axe. La roulette entraînée dans ce mouvement se meut alors sur la génératrice supérieure du cylindre, pendant que son plan reste parallèle aux directrices.

On a la disposition schématique de la figure 90.

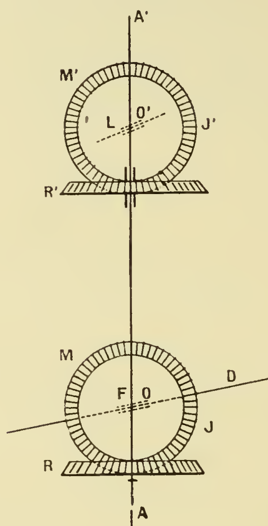
Parmi les systèmes destinés à assurer l'orientation de la roulette, nous citerons les deux suivants qui ont été appliqués dans la construction des appareils étudiés par Abdank, en collaboration avec M. Napoli, ingénieur au chemin de fer de l'Est.

La première solution consiste à employer un parallélogramme articulé ABCD (*fig.* 91) dont un côté est fixe, tandis que la branche AD est constamment parallèle aux directrices.

Un chariot, formé également d'un parallélogramme articulé $a'b'c'd'$, se déplace à l'aide de galets roulant dans des rainures creusées sur les branches AB, CD. La roulette est fixée dans un étrier solidaire de la tige $b'c'$ et un crayon placé en F trace la courbe intégrale.

Dans la seconde solution (*fig.* 92), l'orientation de la

Fig. 92.



roulette a lieu à l'aide d'un double jeu de roues d'angle égales J, J', dont l'un J' peut se déplacer le long de l'axe commun des roues R, R'.

Dans cette translation, la roue R' peut toujours être entraînée par l'arbre AA', à l'aide d'un long clavetage par exemple; elle tourne donc du même angle que la roue R, et, par suite, le mouvement angulaire de M' sera le même que celui de M. Il s'ensuit que la roulette L,

fixée à la roue M', sera parallèle à la directrice D coulissant dans un fourreau F solidaire de M, si le parallélisme a été assuré une fois pour toutes.

INTÉGRAPHES ABDANK-NAPOLI.

Premier modèle. — Dans un premier intégraphe construit par Abdank et Napoli, les deux courbes étaient tracées sur un cylindre; c'était une réalisation de la disposition schématique indiquée par la figure 93.

L'appareil avait été spécialement établi dans le but d'obtenir des courbes continues sur une bande de papier se déroulant sur un tambour cylindrique; l'orientation de la roulette était assurée à l'aide d'une liaison à parallélogramme articulé.

Intégraphe Abdank-Napoli à roues d'angle [1]. — L'appareil en question a été construit en vue d'obtenir les courbes sur une même surface plane.

Il est disposé de la façon suivante (*fig.* 94) :

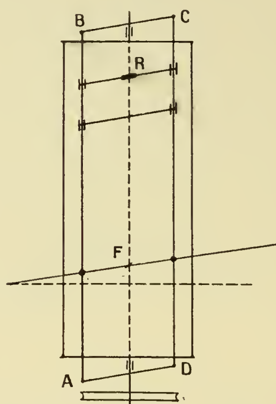
Un chariot, dont la grande dimension est parallèle à yy', se déplace dans la direction de l'axe des x, à l'aide de deux roues à bords minces roulant dans la rainure d'une règle parallèle à cet axe. Le troisième point d'appui de l'ensemble est constitué par la roulette.

Cette dernière est fixée dans un étrier solidaire de la roue dentée M', portée par un second chariot G qui peut glisser dans la direction yy' le long des tiges F, F'. La

(1) Cet appareil figure dans la collection du Conservatoire des Arts et Métiers.

roue dentée R′ est solidaire d'un fourreau C pouvant tourner dans deux paliers K, K′ fixés au chariot, et l'ensemble, guidé par des galets, est mobile le long de l'arbre cannelé AA′.

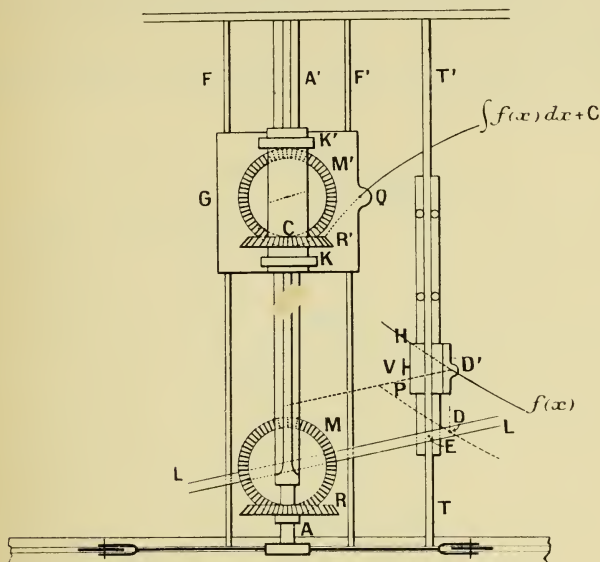
Fig. 93.



Cet arbre, sur lequel est calée la roue R, communique donc à la roulette les mouvements de la directrice LL; celle-ci coulisse entre des galets de façon à passer toujours par le centre de la roue M, et est articulée en E à une pièce H guidée dans la direction de l'axe des y par la tige TT′. Cette pièce porte le traçoir D′ destiné à suivre le contour de la courbe donnée; celui-ci est fixé à un coulisseau P qu'on peut déplacer le long de H et assujettir à l'aide d'une vis V. Ce n'est donc pas, en réalité, la tige LL qui est la directrice, mais bien une droite parallèle passant par le point D′. Il s'ensuit que l'axe des x, au lieu de passer par le centre de la roue M, est déplacé d'une hauteur égale à DD′.

Le tire-ligne, qui trace la courbe intégrale, est fixé en Q au chariot G, et il est orienté par un petit parallélogramme articulé de façon que sa fente soit toujours parallèle au plan de la roulette.

Fig. 94.



La tige TT′ peut être déplacée parallèlement à elle-même dans la direction de l'axe des x; on peut ainsi faire varier la constante de l'appareil, constante qui est représentée par la distance du point D au centre de la roue M.

On peut remarquer qu'avec cet appareil les ordonnées des courbes peuvent atteindre presque toute la hauteur du châssis; de plus, la courbe donnée et la courbe intégrale peuvent chevaucher l'une sur l'autre sans que le chariot portant la roulette gêne les mouvements.

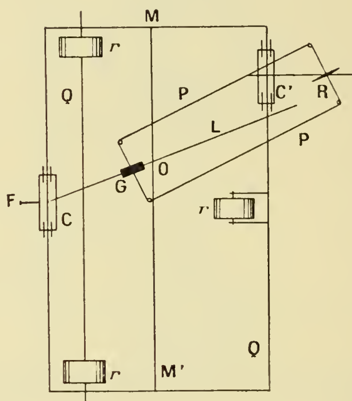
INTÉGRAPHES ABDANK-CORADI.

La maison Coradi a construit plusieurs modèles d'intégraphes dans lesquels on retrouve les dispositions essentielles des appareils d'Abdank.

La figure 95 représente schématiquement un de ces appareils (¹).

Il comprend un cadre Q reposant sur trois rouleaux,

Fig. 95.



r, r, r, et mobile dans la direction de l'axe des x. Deux chariots C, C' se déplacent sur les grands côtés de ce cadre c'est-à-dire parallèlement à yy'. Le chariot C porte un traçoir F destiné à suivre la courbe donnée et une pointe qui est engagée dans la fente longitudinale d'une règle L; celle-ci est mobile d'autre part autour d'une seconde pointe fixée en O à la traverse médiane MM' : Cette

(¹) Cet intégraphe est exposé dans les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers.

règle constitue la directrice de l'appareil. Le chariot intégrateur C' porte la roulette R parallèle à L et le tire-ligne traçant la courbe intégrale.

Un parallélogramme P, dont un côté est solidaire d'un petit chariot G glissant le long de la règle, assure le parallélisme de cette dernière avec le plan de la roulette.

On voit de suite que le tire-ligne tracera une courbe intégrale de la courbe décrite par le traçoir F.

INTÉGRAPHE ACTUEL DE LA MAISON CORADI.

La figure 96 représente le nouveau dispositif de la Maison Coradi.

L'ensemble se compose d'un cadre formé de deux longues règles parallèles L, L' séparées par un faible intervalle. Les trois points de contact avec le plan sont constitués par les deux rouleaux *r*, *r*, montés sur un même axe parallèle aux règles et par la pointe du traçoir.

L'appareil se déplace dans la direction de l'axe des x.

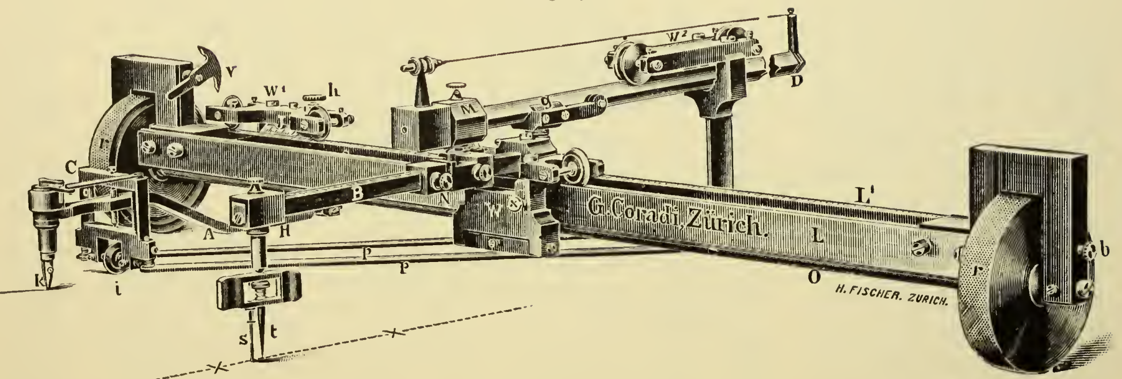
Comme dans le modèle précédent, deux chariots W, W¹ sont mobiles le long des deux règles formant le châssis de l'intégraphe.

Le chariot conducteur W porte la règle graduée B, le traçoir *t* destiné à suivre le contour de la courbe donnée, et l'axe vertical antérieur M de la règle directrice D.

Le chariot intégrateur W¹ est muni d'un bras auquel est fixé le tire-ligne et un cadre mobile C portant la roulette.

Au milieu du grand cadre se trouve le second axe de la règle directrice qui glisse dans un manchon *g* porté par

Fig. 96.



cet axe; un chariot W^2, mobile sur la règle, est relié au cadre C au moyen d'un parallélogramme articulé, destiné à maintenir le plan de la roulette constamment parallèle à la règle directrice.

La base de l'appareil est la distance des deux axes de rotation de la directrice, quand celle-ci est perpendiculaire à la grande dimension du châssis. On modifie la valeur de cette base en déplaçant l'axe antérieur M; à cet effet, un manchon mobile N, solidaire de la règle directrice, peut coulisser sur la règle graduée B et être fixé au point voulu à l'aide d'une vis de pression. Un vernier fixé au manchon permet d'apprécier le $\frac{1}{20}$ de millimètre.

La règle L′ est munie "une graduation et le chariot intégrateur porte également un vernier à l'aide duquel on peut lire le résultat final de l'intégration, comme avec un planimètre ordinaire.

CHAPITRE IV.

L'ANALYSE HARMONIQUE ET LES ANALYSEURS.

Généralités.

SÉRIE DE FOURIER. ANALYSE HARMONIQUE.

Fourier a démontré que toute fonction périodique de fréquence 1 peut être décomposée en une série de fonctions périodiques simples de fréquence 1, 2, 3, ... Ces fonctions sont des fonctions de sinus et de cosinus, de

telle sorte que la fonction périodique $y = f(\theta)$ peut se mettre sous la forme :

$$y = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta + \ldots.$$

Pour que cette série soit complètement déterminée, il faut connaître la valeur des différents coefficients

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots;\quad B_1,\ B_2,\ \ldots.$$

Cauchy a démontré que ces coefficients étaient donnés par les intégrales [1] :

$$(1)\qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\, d\theta, \\ A_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\cos\theta\, d\theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\cos n\theta\, d\theta; \\ B_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\sin\theta\, d\theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\sin n\theta\, d\theta. \end{cases}$$

La série de Fourier peut être donnée également sous la forme

$$y = C_0 + C_1 \sin(\theta + \varphi_1)$$
$$+ C_2 \sin(2\theta + \varphi_2) + \ldots + C_n \sin(n\theta + \varphi_n).$$

---

[1] L'expression des coefficients A_0, A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_n de la série de Fourier s'obtient facilement de la façon suivante :

Multipliant les deux membres du développement par $\cos n\theta$ et inté-

En développant les sinus des différents termes, on a immédiatement les relations reliant les coefficients de cette

---

grant de o à 2π, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} y \cos n\theta\, d\theta &= A_0 \int_0^{2\pi} \cos n\theta\, d\theta \\ &+ A_1 \int_0^{2\pi} \cos\theta \cos n\theta\, d\theta + \ldots + A_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta\, d\theta \\ &+ B_1 \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos n\theta\, d\theta + \ldots + B_n \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos n\theta\, d\theta,\end{aligned}$$

c'est-à-dire pour le second membre une somme de termes ayant l'une des deux formes

$$A_p \int_0^{2\pi} \cos p\theta \cos n\theta\, d\theta,$$

$$B_p \int_0^{2\pi} \sin p\theta \cos n\theta\, d\theta.$$

Or il est facile de vérifier qu'entre les limites o et 2π, toutes ces intégrales sont nulles sauf celle correspondant au terme A pour lequel $p = n$.

La valeur de cette intégrale étant égale à π, on a

$$\int_0^{2\pi} y \cos n\theta\, d\theta = A_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta\, d\theta = A_n \pi,$$

d'où

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos n\theta\, d\theta.$$

En multipliant par $\sin n\theta$ et intégrant entre les mêmes limites, on aurait de même la valeur du coefficient B_n

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin n\theta\, d\theta.$$

La valeur du coefficient A_0 s'obtient en intégrant de o à 2π,

$$\int_0^{2\pi} y\, d\theta = A_0 \int_0^{2\pi} d\theta = A_0\, 2\pi,$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y\, d\theta.$$

dernière forme aux coefficients $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$, du premier développement.

On a

$$y = C_0 + C_1 \cos\varphi_1 \sin\theta + C_1 \sin\varphi_1 \cos\theta + \ldots$$
$$+ C_n \cos\varphi_n \sin n\theta + C_n \sin\varphi_n \cos n\theta,$$

d'où

$$C_1 \cos\varphi_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin\theta \, d\theta = A'_1,$$

$$C_1 \sin\varphi_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos\theta \, d\theta = B'_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_n \cos\varphi_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin n\theta \, d\theta = A'_n,$$

$$C_n \sin\varphi_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos n\theta \, d\theta = B'_n,$$

$$\operatorname{tang}\varphi_n = \frac{B'_n}{A'_n},$$

$$C_n = \sqrt{A'^2_n + B'^2_n}.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont appelées les phases des diverses fonctions simples.

La série de Fourier trouve son application toutes les fois qu'il s'agit d'étudier un phénomène périodique; on en rencontre de nombreux exemples en électrotechnique, plus particulièrement dans l'étude des courants alternatifs et dans l'étude des mouvements de machines, de la construction des navires, des phénomènes naturels, comme le mouvement des marées, etc.

Les courbes expérimentales obtenues présentent rarement le caractère de la périodicité. Une courbe peut présenter de nombreuses ou de grandes aspérités et être considérée comme s'écartant beaucoup de la sinusoïde,

alors qu'elle en est, en réalité, beaucoup plus proche qu'une autre courbe de formes moins tourmentées. Tout dépend en effet de l'amplitude et de la phase, et la superposition de ces éléments peut, suivant les cas, amener à considérer comme non périodique un phénomène qui l'est réellement.

L'analyse harmonique a pour but, étant donnée une courbe, de la décomposer en ses harmoniques simples, c'est-à-dire de déterminer les courbes, dont la superposition reproduit précisément la courbe donnée.

Cela revient à connaître les quantités

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n \quad B_1,\ \ldots,\ B_n;\quad \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n.$$

Trois méthodes se présentent naturellement à l'esprit :

1° La méthode par le calcul direct ;

2° Les procédés graphiques ;

3° Les procédés mécaniques qui nécessitent l'emploi d'appareils spéciaux permettant d'effectuer mécaniquement les intégrations indiquées par les relations (1).

Les formules de Cauchy donnent la méthode à suivre pour calculer tous les éléments d'une courbe périodique donnée. On multiplie les ordonnées de la courbe successivement par celles des sinus et cosinus des fréquences 1, 2, 3 ..., et l'on intègre chacune des nouvelles courbes entre les limites d'une période ; en multipliant les intégrales ainsi obtenues par $\frac{1}{\pi}$, on a les valeurs des différents coefficients.

Ces opérations sont toujours longues et laborieuses ;

aussi y a-t-il intérêt, dans les applications, à remplacer le calcul direct par les méthodes graphiques ou mieux par les procédés mécaniques.

PROCÉDÉS GRAPHIQUES.

a. La méthode suivante, publiée par M. Basil Widmore dans l'*Electrician de Londres* [1], fournit un moyen commode de déterminer en grandeur et en phase les composantes de fréquences successives.

Considérons le tracé d'une période complète de la courbe périodique donnée X. Si l'on divise la période en m parties égales, on obtient, en superposant ces différentes parties par addition de leurs ordonnées, une nouvelle courbe débarrassée de tous les termes dont la fréquence rapportée à celle de la courbe complète n'est pas un multiple de m.

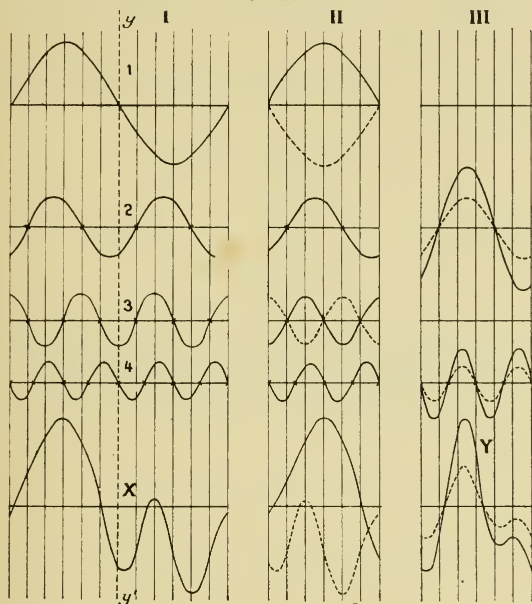
Ce résultat peut s'expliquer assez facilement de la façon suivante (*fig*. 97) :

Supposons que la courbe donnée X soit le résultat de l'addition des quatre sinusoïdes 1, 2, 3, 4 dont les fréquences sont relativement comme 1, 2, 3, 4. Partageons toute la figure I en deux sur toute sa hauteur suivant la ligne yy', et superposons les deux moitiés ainsi obtenues. On a ainsi la figure II, et l'on voit immédiatement que, par addition des deux tronçons obtenus pour chaque courbe, les sinusoïdes 1 et 3, dont la fréquence n'est pas un multiple de 2, disparaissent, tandis que les sinusoïdes 2 et 4 subsistent avec des ordonnées dont les valeurs sont doubles

(1) *L'Éclairage électrique*, t. V, 1895.

de celles qu'elles avaient dans la courbe originale. On obtient alors la figure III et, en réduisant de moitié les ordonnées, on a finalement en pointillé la courbe Y débarrassée des termes de fréquence 1 et 3.

Fig. 97.



En répétant la même opération, par une nouvelle division par 2, on déterminerait en amplitude et en phase la composante de fréquence 4 de la courbe primitive.

La division de la courbe par 3 aurait donné immédiatement la composante 3.

Les propriétés précédentes peuvent d'ailleurs se démontrer par un calcul simple sur lequel nous n'insisterons pas.

On voit que ce procédé est d'une application commode; la précision des résultats dépend du soin avec lequel sont dessinées les courbes et il y a intérêt, à ce point de vue, à les tracer à grande échelle.

b. Méthode de Clifford (¹). — Elle est basée sur la remarque suivante :

Considérons l'expression générale d'un coefficient A_n par exemple (²)

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin nx \, dx.$$

Si l'on pose

$$\text{(1)} \qquad \sin nx \, dx = dX,$$

la détermination du coefficient revient à l'évaluation de l'aire d'une courbe ayant pour ordonnées y et pour abscisses les valeurs de X résultant de la relation (1), c'est-à-dire

$$X = \frac{1}{n}[1 - \cos nx].$$

Si donc d'une longueur donnée on retranche successivement les projections de cette longueur sur une droite sous les différents angles nx, on obtient les abscisses correspondantes X de la courbe dont l'intégration donnera la valeur du coefficient A_n.

Le coefficient B_n s'obtient de la même façon, mais en projetant sur une droite perpendiculaire à la première.

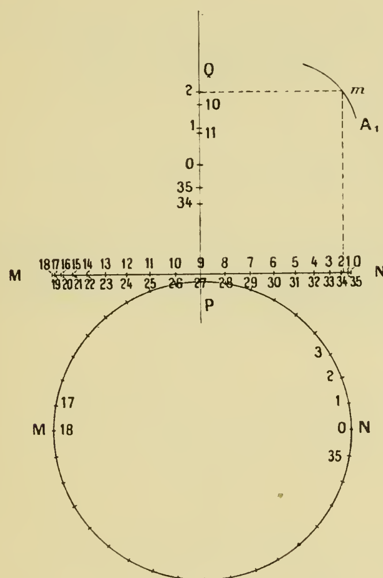
(¹) *L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895.

(²) On remarquera que, dans l'exposé de cette méthode, le coefficient du terme en sinus est désigné par A_n au lieu de B_n.

Le professeur Perry a appliqué ce procédé de la façon suivante :

Divisons la période en 36 parties égales et supposons connues les valeurs de la fonction à ces instants. Pour trouver les différents coefficients, choisissons une longueur MN comme diamètre d'un cercle dont la circonférence

Fig. 98.



de 36cm de longueur est divisée en 36 parties égales numérotées 0, 1, 2, 3 ... 35. En abaissant de tous ces points des perpendiculaires sur le diamètre, on a sur MN les points correspondants (*fig.* 98).

Sur une verticale PQ on porte successivement les valeurs de la fonction aux instants 0, 1, 2, ... On a ainsi des

points 0, 1, 2, 3, ..., 35 (non tous marqués sur la figure), et, en élevant une perpendiculaire en 2 points correspondants des axes PQ et MN, on obtient un point m d'une courbe A ou d'une courbe B, suivant les cas.

Pour A_1 par exemple on prendra :

Ordonnées sur PQ, 0, 1, 2, 3, ...
Abscisses sur MN, 0, 1, 2, 3, ...

Pour B_1 il faut prendre dans le plan du cercle l'origine sur un diamètre perpendiculaire à MN.

On aura donc :

Ordonnées sur PQ, 0, 1, 2, 3, ...
Abscisses sur MN, 9, 10, 11, 12, ...

Si l'on passe aux A_2 et B_2, on voit immédiatement qu'il faut prendre sur MN les points numérotés de 2 en 2 à partir de l'origine, ce qui donne,

Pour A_2 :

Ordonnées sur PQ, 0, 1, 2, 3, ...
Abscisses sur MN, 0, 2, 4, 6, ...

Pour B_2 :

Ordonnées sur PQ, 0, 1, 2, 3, ...
Abscisses sur MN, 9, 11, 13, 15, ...

On a ainsi une série de courbes fermées dont l'aire permet de calculer la valeur des coefficients; si la circonférence du cercle dont MN est le diamètre a l centimètres, il faut diviser les aires ainsi obtenues par $\frac{nl}{2}$, n ayant successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., n.

PROCÉDÉS MÉCANIQUES.

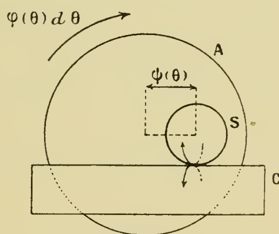
Il nous reste à examiner comment le problème de l'analyse harmonique peut être résolu mécaniquement; les appareils qui ont été réalisés dans ce but forment une catégorie d'intégrateurs auxquels on a donné le nom d'*analyseurs harmoniques* et dont nous allons décrire les principaux types.

Analyseurs harmoniques.

ANALYSEUR DE LORD KELVIN.

C'est le premier appareil de ce genre qui ait été réalisé; il présente une application directe d'une méthode générale pour le calcul de l'intégrale du produit de deux fonctions qui a fait l'objet d'une Communication à la Société royale de Londres. Le « Meteorological Office » de cette

Fig. 99.



ville s'en sert pour déterminer les facteurs périodiques dans les variations des différents éléments météorologiques.

Considérons un disque A mobile autour d'un axe perpendiculaire à son plan passant par son centre, et une

sphère S se déplaçant suivant un rayon en restant toujours tangente au disque et à un cylindre C, mobile autour de son axe, dont les génératrices sont parallèles à ce rayon.

Si l'on donne au disque une rotation élémentaire représentée par

$$\varphi(\theta)\,d\theta,$$

et si la distance du point de contact de la sphère au centre du disque est représentée par

$$\psi(\theta),$$

le cylindre tournera de $d\omega$ tel que

$$d\omega = \lambda\,\varphi(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta,$$

et en intégrant

$$\omega = \int \lambda\,\varphi(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta.$$

L'angle ω dont aura tourné le cylindre donnera par conséquent la valeur de l'intégrale.

Ce principe est identique à celui du planimètre à rotation de J. Thomson décrit précédemment.

La rotation du disque pourra se faire de la façon suivante :

Construisons sur un cylindre la courbe

$$Y = \int_0^\theta \varphi(\theta)\,d\theta,$$

les ordonnées étant comptées suivant les génératrices, et les θ suivant la circonférence (*fig.* 100). Si, à l'aide d'une pointe faisant partie d'une crémaillère engrenant avec un pignon denté solidaire du disque, on suit cette courbe, en

maintenant la pointe sur la génératrice supérieure du cylindre, il est évident que, quand celui-ci tournera de $d\theta$, la pointe et par suite la crémaillère se déplaceront de

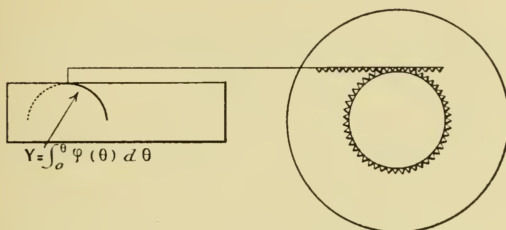
$$dY = \varphi(\theta)\, d\theta.$$

Le disque tournera alors de

$$\lambda\, \varphi(\theta)\, d\theta.$$

Le déplacement de la sphère peut s'effectuer à l'aide

Fig. 100.



d'une fourche solidaire d'une tige terminée par une pointe qu'on maintient constamment sur la génératrice d'un cylindre parallèle au précédent.

Si l'on trace sur ce cylindre la courbe

$$y = \psi(\theta),$$

les ordonnées étant comptées suivant les génératrices, et les abscisses sur la circonférence, et si l'on s'arrange de façon que le point de contact de la sphère soit au centre du disque quand la pointe est sur l'axe des θ, la distance du point de contact au centre sera égale à y pendant la rotation du cylindre; il suffit pour cela de maintenir la

pointe sur le point de la courbe passant sur la génératrice supérieure.

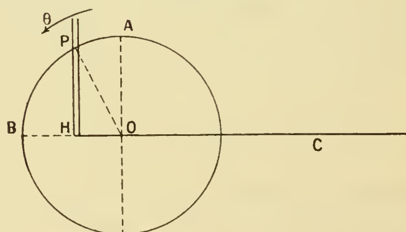
Il résulte de ce qui précède que pour réaliser l'appareil, il faudrait autant de mécanismes qu'on veut calculer de coefficients; chaque mécanisme comprenant : d'une part, disque, sphère et cylindre enregistreur; d'autre part, deux cylindres parallèles ayant même déplacement angulaire et sur lesquels sont tracées les courbes $y = f(\theta)$ (déterminées expérimentalement), et

$$\int \sin n\theta \, d\theta \text{ ou } \int \cos n\theta \, d\theta,$$

servant respectivement à guider le déplacement des sphères et à produire la rotation des plateaux.

Pratiquement, on ne trace la courbe $y = f(\theta)$ que sur un seul cylindre qui sert à la manœuvre simultanée de toutes les sphères; à cet effet, la pointe est reliée à toutes les fourches qui se déplacent par conséquent de la même quantité.

Fig. 101.



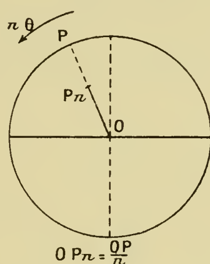
Quant aux courbes $\int \sin n\theta \, d\theta$ et $\int \cos n\theta \, d\theta$ on évite de les construire, à l'aide de la disposition suivante :

La crémaillère C est reliée, par une coulisse qui lui est

perpendiculaire, à un point P de la circonférence du cylindre portant la courbe $y = f(\theta)$ (*fig.* 101). Si l'on prend le rayon du cylindre pour unité, la longueur OH représente $\sin\theta$ quand P se déplace de A vers B, A étant l'origine des θ. Si au début P est en B, OH représente alors $\cos\theta$. Le mouvement élémentaire de la crémaillère et par suite celui du disque seront donc proportionnels à $\cos\theta\, d\theta$ ou $\sin\theta\, d\theta$.

Pour avoir maintenant un déplacement élémentaire

Fig. 102.



$\cos n\theta\, d\theta$ ou $\sin n\theta\, d\theta$, il suffit de relier la crémaillère correspondante, par un dispositif identique, à un point fixe d'une roue faisant n tours pendant que le cylindre en fait 1, la distance de ce point fixe P_n au centre étant égale à $\frac{OP}{n}$ c'est-à-dire $\frac{1}{n}$ puisque OP a été pris pour unité.

Il est évident que le déplacement élémentaire de la crémaillère devient alors

$$\frac{1}{n}\cos n\theta\, dn\theta \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{n}\sin n\theta\, dn\theta,$$

c'est-à-dire

$$\cos n\theta\, d\theta \quad \text{ou} \quad \sin n\theta\, d\theta.$$

Le disque a donc bien dans les deux cas le déplacement voulu.

Il est facile de se rendre compte que cet appareil est d'une exécution compliquée et est par suite coûteux; aussi il ne trouve guère son emploi que dans les stations météorologiques.

ANALYSEURS DE HENRICI.

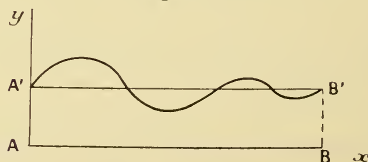
Le principe des analyseurs étudiés par le professeur Henrici de Londres repose sur la remarque suivante :

Considérons l'expression générale des coefficients de la série de Fourier et intégrons par parties.

On a

$$(1)\quad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\cos n\theta\, d\theta \\ \quad = \left[\dfrac{1}{n\pi} y \sin n\theta\right]_0^{2\pi} - \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin n\theta\, dy, \\ B_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y\sin n\theta\, d\theta \\ \quad = \left[-\dfrac{1}{n\pi} y \cos n\theta\right]_0^{2\pi} + \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos n\theta\, dy. \end{cases}$$

Fig. 103.

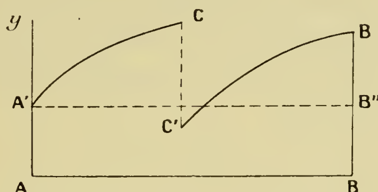


L'intégration étant faite de 0 à 2π, si les valeurs extrêmes de y sont égales, c'est-à-dire si $AA' = BB'$ (*fig.* 103), les

deux premiers termes du second membre des égalités précédentes disparaissent.

Dans le cas où les valeurs extrêmes de y ne seraient pas les mêmes, on ajoute à la courbe la partie B′B″ de la

Fig. 104.



dernière ordonnée. De même si la courbe est discontinue de C à C′, on rétablit la continuité à l'aide de la droite CC′ (*fig.* 104).

La détermination des intégrales du premier membre des égalités (1) revient alors à celle des intégrales

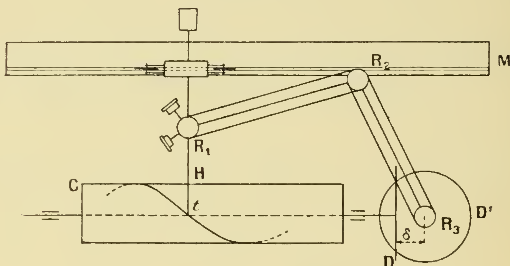
$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \, dy \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos n\theta \, dy.$$

Soit $y = f(\theta)$ la courbe déterminée expérimentalement; il faut à chaque instant décomposer dy, variation infiniment petite de l'ordonnée, en deux éléments dont les directions fassent avec l'axe des y les angles $n\theta$ et $\frac{\pi}{2} - n\theta$, et faire la somme de ces éléments. Il suffit pour cela de déplacer parallèlement à l'axe des y deux roulettes intégrantes dont les axes soient rectangulaires et fassent, à l'aide d'un mécanisme approprié, les angles $n\theta$ et $\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$ avec la direction du déplacement. Les angles dont elles auront tourné donneront la valeur des intégrales cherchées.

Dans les premiers appareils de Henrici, ces conditions étaient réalisées de la façon suivante :

La courbe $y = f(\theta)$ était tracée sur un cylindre C horizontal dont l'axe portait un disque circulaire D. Ce disque produisait par entraînement la rotation d'un deuxième disque D′ à axe vertical. Les deux roulettes étaient placées sur une roue R_1, portée par un chariot se déplaçant parallèlement aux génératrices du cylindre en roulant dans la rainure d'une règle M.

Fig. 105.



Un traçoir t fixé au bras H du chariot suivait le point de la courbe passant sur la génératrice supérieure du cylindre.

Enfin la rotation du disque D′ entraînait celle de la roue R_1 à l'aide d'une poulie intermédiaire R_2 sur laquelle s'enroulaient deux fils d'acier passant respectivement sur R_1 et R_3. La poulie R_2 était portée par l'axe d'articulation de deux bras joignant les centres des poulies R_1, R_2 et R_2, R_3.

Désignons par r le rayon du disque D, par δ la distance de ce disque au centre de D′; pour une rotation élémentaire $d\theta$ du cylindre, D′ tourne de $d\Psi$, tel que

$$r\,d\theta = \delta\,d\Psi.$$

Si l'on s'arrange de façon que $\frac{r}{\delta} = n$, on aura

$$d\Psi = n\,d\theta,$$
$$\Psi = n\,\theta;$$

par suite, quand le cylindre aura tourné de θ, la roue R_1 portant les roulettes intégrantes aura tourné de $n\theta$; celles-ci donnent par conséquent les intégrales cherchées.

En donnant à n différentes valeurs, on obtient à chaque fois deux nouveaux coefficients.

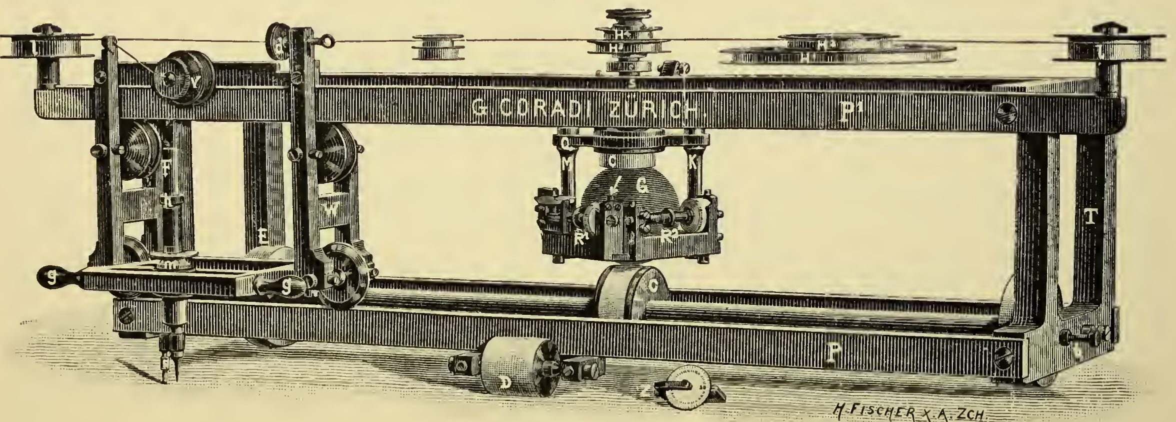
Le chariot était maintenu par un contrepoids ou par un galet ayant pour axe le prolongement du bras portant le traçoir.

Appareil actuel. — Ce nouvel analyseur (*fig.* 106), construit par la maison Coradi, rappelle par certains points des dispositions analogues à celles de l'intégromètre de Helle-Schaw établi par le même constructeur.

L'appareil, représenté schématiquement (*fig.* 107), comprend un cadre rectangulaire C porté par un axe sur lequel sont fixés deux rouleaux R, R; un troisième rouleau placé au milieu de la traverse antérieure assure l'équilibre de l'appareil. L'ensemble se déplace sur la feuille de papier sur laquelle est tracée la courbe et qu'on a étendue sur une surface plane. Un chariot D portant un traçoir t peut se déplacer dans la partie antérieure du cadre parallèlement à sa grande dimension; quatre roues S le guident sur les traverses TT'.

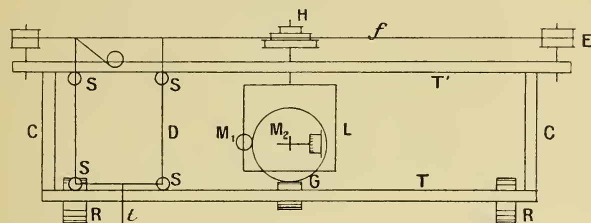
L'appareil intégrant comprend un cadre mobile autour d'un axe vertical portant des poulies H de diamètres différents. Ce cadre entoure une sphère en verre reposant à

Fig. 106.



sa partie inférieure sur un cylindre en celluloïde G calé sur l'arbre portant l'appareil. Les deux roulettes intégrantes M_1, M_2, dont les axes sont rectangulaires, sont constamment tangentes à la sphère suivant un grand cercle

Fig. 107.



horizontal. Les plans de ces roulettes passent par l'axe vertical de la sphère.

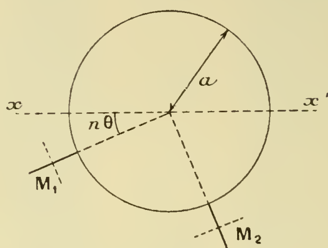
Autour des poulies H est enroulé un fil d'argent f dont les extrémités sont reliées d'une part à une poulie portée par le chariot D, d'autre part à un ressort de tension E.

Déplaçons l'instrument parallèlement à l'axe des y; la sphère, entraînée par le rouleau G, tourne d'un angle proportionnel à dy autour de son diamètre horizontal parallèle à l'axe des rouleaux, c'est-à-dire à l'axe des x.

Si, pendant ce déplacement, on fait avancer le chariot D le long des côtés T, T' du cadre, c'est-à-dire parallèlement à l'axe des x, le cadre L entourant la sphère tourne autour de son axe vertical d'un angle qui est proportionnel à x. Soit n le nombre de tours que fait la poulie h_n quand le chariot parcourt la longueur totale de la base $= c$; lorsqu'il se sera déplacé de x, l'angle dont aura tourné la poulie sera $n\theta = \frac{2\pi nx}{c}$.

Si maintenant on suit le contour d'une courbe avec la pointe du traçoir, les deux mouvements précédents se produisent simultanément.

Fig. 108.



La roulette M_1 tourne alors d'un angle $d\omega_1$, tel que

$$\rho\, d\omega_1 = K_1 a \sin n\theta\, dy$$

ou

$$d\omega_1 = \lambda_1 \sin n\theta\, dy,$$

en posant

$$\lambda_1 = \frac{K_1 a}{\rho},$$

et par suite

$$\omega_1 = \lambda_1 \int_0^{2\pi} \sin n\theta\, dy.$$

De même, pour la roulette M_2,

$$\omega_2 = \lambda_2 \int_0^{2\pi} \cos n\theta\, dy.$$

Les valeurs des coefficients A_n et B_n sont alors

$$A_n = -\frac{1}{n}\frac{\omega_1}{\lambda_1 \pi},$$

$$B_n = \quad \frac{1}{n}\frac{\omega_2}{\lambda_2 \pi}.$$

Les dimensions sont choisies de façon que

$$\lambda_1 \pi = -1, \qquad \lambda_2 \pi = 1,$$

et l'on a finalement,

$$A_n = \frac{\omega_1}{n},$$

$$B_n = \frac{\omega_2}{n}.$$

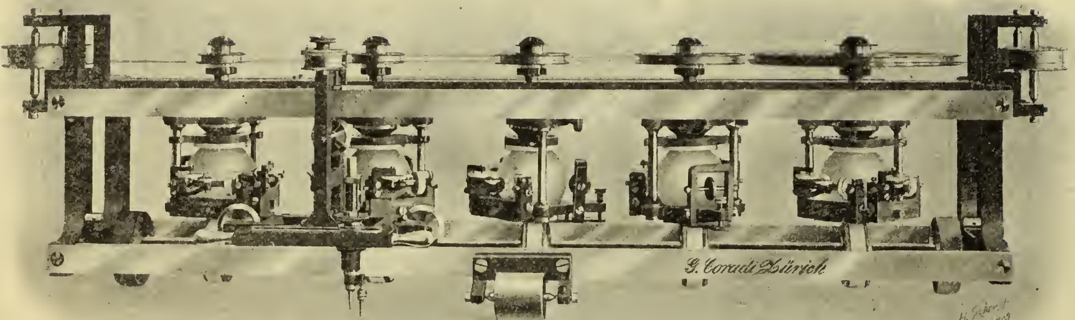
On fait varier n en enroulant successivement le fil sur chacune des poulies (H). L'analyseur peut d'ailleurs être établi pour comporter un ou plusieurs appareils intégrants selon le nombre de coefficients qu'on se propose d'obtenir.

La maison Coradi construit un appareil à cinq sphères (*fig.* 109); chacune des poulies (H) est double : on peut donc avoir 10 valeurs différentes pour n, et obtenir par deux opérations 20 coefficients de la série de Fourier.

Remarque I. — Il résulte de la théorie précédente que, quand le traçoir est à l'origine ou à la fin de sa course, les axes des roulettes des sinus doivent être parallèles à l'axe des x, et ceux des roulettes des cosinus parallèles à l'axe des y. L'appareil est établi de façon que ces conditions soient remplies.

Remarque II. — Dans la théorie précédente, on suppose que le centre de la sphère coïncide avec l'axe géométrique de la poulie; pratiquement, cette condition n'est pas rigoureusement remplie et le point de contact de la sphère et du cylindre décrit sur ce cylindre un petit cercle ; il en résulte que la sphère subit, autour d'un diamètre horizontal, une légère rotation qui modifie les indications des

Fig 109.



deux roulettes. Mais si après avoir parcouru la courbe on revient en arrière parallèlement à l'axe des x, tous les petits cercles sont décrits en sens inverse, et il y a compensation de l'erreur.

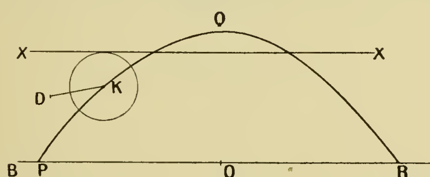
ANALYSEUR DE YULE [1].

L'analyseur de M. Udny Yule permet de déterminer les coefficients A_n, B_n d'une série de Fourier par de simples opérations planimétriques.

La méthode consiste à tracer une courbe auxiliaire telle que la différence entre la valeur de son aire et celle de l'aire de la courbe à analyser soit, à un facteur constant près, égale au terme A_n ou B_n qu'on veut déterminer.

Soit PQR la courbe donnée dont la base PR $= \theta$.

Fig. 110.



Considérons un cercle dont le centre se déplace sur la courbe et qui roule en même temps sur une droite XX parallèle a PR mobile seulement dans la direction des yy'. La circonférence est une partie aliquote $\frac{\theta}{n}$ de la base PR. Soit D un point du plan du cercle situé à une distance r du centre et tel que le rayon KD soit sur le prolongement de PR quand le centre K est en P.

---

(1) *L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895.

L'angle dont tourne le cercle en suivant une longueur θ sur XX est $2n\pi$; en parcourant une distance x, il tournera donc de $\frac{2n\pi}{\theta}x$. Par conséquent, en désignant par x_1, y les coordonnées du point K, celles de D auront pour valeurs

$$X = x_1 - r\cos n\pi \cos nx,$$
$$Y = y - r\cos n\pi \sin nx.$$

Lorsque le centre K parcourt la courbe PQR, le point D décrit une seconde courbe, dont l'aire est par suite

$$R_1 = \int Y\,dX$$

ou, en remplaçant Y et dX par leurs valeurs,

$$R_1 = \int [y - r\cos n\pi \sin nx][dx_1 + rn\cos n\pi \sin nx\,dx],$$

$$R_1 = \int y\,dx_1 + rn\cos n\pi \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} y \sin nx\,dx$$
$$- r\cos n\pi \int \sin nx\,dx_1 + r^2\cos^2 n\pi \int \sin nx\,d\cos nx.$$

Les deux dernières intégrales sont nulles quand on prend pour limites celles de la courbe fermée. En désignant alors par S la surface de la courbe donnée PQR, on a

$$R_1 = S + \cos n\pi\, nr \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} y \sin nx\,dx.$$

Si au début le point D se trouve sur une perpendicu-

laire à PR, on a de même

$$R_2 = S + \cos n\pi\, nr \int_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} y \cos nx\, dx.$$

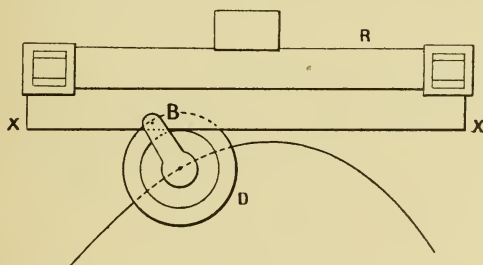
Pour plus de commodité, on peut prendre r égal à 10^{cm}. On a donc en définitif

$$R_1 = S + \cos n\pi . 10 n B_n,$$
$$R_2 = S + \cos n\pi . 10 n A_n.$$

D'après ce qui précède, on voit que pour obtenir A_n et B_n il suffit de connaître S, R_1 et R_2. L'appareil doit donc être disposé de telle sorte que le point D trace à l'aide d'un style les deux courbes en question, dont il faudra ensuite déterminer l'aire; plus simplement, on fixera en D la pointe d'un planimètre d'Amsler, ce qui permettra d'effectuer l'intégration directement.

L'appareil de M. Yule est établi dans ce but.

Fig. 111.



Il se compose d'un rouleau R portant la règle XX dont le bord est taillé en crémaillère (*fig.* 111). Le disque D est constitué par une série de roues dentées de diamètres différents; les nombres de dents sont respectivement 240,

120, 80... Chaque roue porte trois ouvertures recouvertes de glaces portant en leur centre des repères qui permettent de prendre la ligne de base. La pointe du planimètre se fixe dans une cavité pratiquée sur le disque, sur une normale à la ligne de base. Pour les petits disques, cette cavité est ménagée dans un bras B solidaire de la roue dentée, son rayon étant plus petit que la distance de la cavité au centre. Un disque plus grand monté sur le même axe que la roue dentée sert à prendre la base.

La course de la règle étant limitée, l'échelle à employer varie avec chaque type de courbe et avec l'amplitude maximum.

NOUVEL ANALYSEUR (1).

Ce nouvel analyseur, décrit par M. Mader dans l'*Electrotechnische Zeitschrift*, est simple et donne des résultats suffisamment exacts avec une base quelconque. Son principe repose sur la méthode graphique de Clifford et sa construction présente quelques analogies avec l'appareil de Yule.

Il comporte essentiellement un chariot W (*fig.* 112), mobile seulement dans la direction de l'axe des y et auquel se trouvent assujetties trois pièces mobiles :

1° Un levier rectangulaire FKS, mobile autour du point K, et muni en S d'une poulie;

$$FK = m, \qquad KS = l;$$

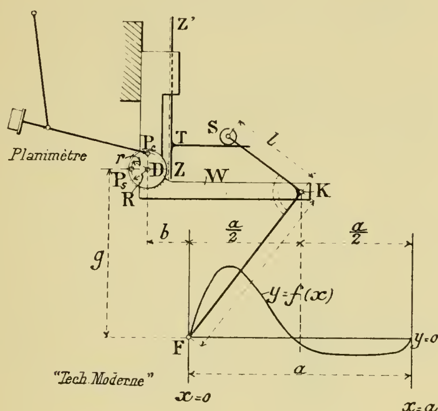
2° Une crémaillère ZZ' mobile par rapport au chariot W parallèlement à l'axe des y. Son mouvement se produit

(1) *La Technique moderne,* t. II, mars 1910, p. 177.

sous l'action de la poulie S et d'un bras T parallèle à l'axe des x;

3° Une roue dentée de rayon R, qui peut tourner autour du point D du chariot W et dont les dents engrènent avec la crémaillère ZZ'. A chaque rotation du levier FKS

Fig. 112.



correspond une rotation de la roue. Sur cette roue se trouvent, à une distance r du centre D, les points P_s et P_c servant à fixer la pointe d'un planimètre polaire.

Ces points, dont les trajectoires servent à calculer respectivement le coefficient d'un terme en sinus ou en cosinus, sont situés sur deux diamètres perpendiculaires de la roue D ([1]); de plus, l'appareil est disposé de façon

([1]) Dans l'analyseur de Yule, le même point trace successivement chacune des deux courbes correspondant à une même valeur de n; comme on l'a vu dans la description de cet appareil, ce point se trouve, au début de l'opération, dans le prolongement de la ligne de base, ou dans une direction perpendiculaire, suivant qu'il s'agit de calculer le coefficient d'un terme en sinus ou en cosinus; le principe reste le même dans les deux appareils.

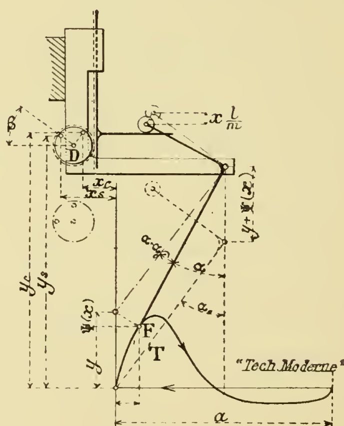
qu'au début de l'opération, c'est-à-dire quand la pointe F est à l'origine, le point P_s soit sur le diamètre de la roue D parallèle à l'axe des x, et le point P_c sur le diamètre perpendiculaire à cette même direction.

Les coordonnées de ces points sont alors respectivement

$$x_s = -(b+r), \qquad x_c = -b,$$
$$y_s = g, \qquad y_c = g + r.$$

Lorsqu'avec la pointe F on suit la courbe (*fig.* 113) depuis l'origine jusqu'à un point $x = x$, $y = f(x)$, la

Fig. 113.



poulie S et, par suite, la crémaillère ZZ' se déplacent parallèlement à l'axe des y de $x\frac{l}{m}$; la roue D tourne donc d'un angle β, tel que

$$\beta = \frac{x}{R}\,\frac{l}{m}$$

et son centre se déplace dans le sens de l'axe des y d'une

quantité $y + \Psi(x)$, $\Psi(x)$ étant une fonction qui dépend de la rotation $\alpha - \alpha_0$ du levier FKS.

Les coordonnées des points P_s et P_c sont alors

$$x_s = -\left[b + r\cos\left(\frac{xl}{Rm}\right)\right],$$
$$y_s = g + y + \Psi(x) + r\sin\left(\frac{xl}{Rm}\right)$$

et

$$x_c = -b + r\sin\left(\frac{xl}{Rm}\right),$$
$$y_c = g + y + \Psi(x) + r\cos\left(\frac{xl}{Rm}\right).$$

Si avec la pointe F on suit la courbe jusqu'au point $x = a$, $y = 0$, et si l'on revient par l'axe des x à l'origine, les points P_s, P_c décrivent des courbes fermées. On a alors, en désignant par S_s et S_c les aires correspondant à ces deux courbes,

$$S_s = \int_0^a \left[g + y + \Psi(x) + r\sin\left(\frac{xl}{Rm}\right)\right] d\left[-b - r\cos\left(\frac{xl}{Rm}\right)\right]$$
$$+ \int_a^0 \left[g + 0 + \Psi(x) + r\sin\left(\frac{xl}{Rm}\right)\right] d\left[-b - r\cos\left(\frac{xl}{Rm}\right)\right]$$

ou

$$S_s = \frac{rl}{Rm}\int_0^a y\sin\left(\frac{xl}{Rm}\right)dx.$$

On a de même

$$S_c = \frac{rl}{Rm}\int_0^a y\cos\left(\frac{xl}{Rm}\right)dx.$$

En faisant (au moyen d'un jeu de roues dentées)

$$R = a\frac{l}{m}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{1}{n\pi}K,$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a finalement

$$S_s = K\frac{2}{a}\int_0^a y \sin\left(n\frac{2\pi x}{a}\right) dx = KB_n,$$

$$S_c = K\frac{2}{a}\int_0^a y \cos\left(n\frac{2\pi x}{a}\right) dx = KA_n.$$

On met en P_s ou en P_c la pointe mobile d'un planimètre polaire ordinaire, on suit avec la pointe F la courbe de $x = 0$ jusqu'à $x = a$ et l'on revient à l'origine en suivant l'axe des x; la différence des lectures faites au planimètre donne K fois la valeur de B_n ou de A_n en grandeur et en signe. Le coefficient est positif si le chiffre final est plus grand que le chiffre initial, il est négatif dans le cas contraire.

En revenant à l'origine en suivant une courbe périodique quelconque $y = \chi(x)$ au lieu de suivre l'axe des x, on peut analyser les harmoniques de la différence

$$f(x) - \chi(x).$$

En faisant varier méthodiquement la longueur de la base, la pointe F peut se déplacer de quantités connues sur le levier FKS; on peut découvrir des périodicités cachées.

La possibilité d'employer la base $\frac{a}{n}$ permet de trouver les coefficients A_n et B_n, même si la roue dentée employée n'est pas celle destinée à leur calcul. On divise en effet la base en n parties égales et l'on calcule pour chacune de ces parties les coefficients des premières harmoniques; la somme de tous ces coefficients divisée par n donne A_n ou B_n.

L'instrument est construit de façon que $K = 10$; d'autre

part, 1^{cm^2} lu au planimètre correspond à une amplitude de $0^{cm},1$; les divisions d'un planimètre ordinaire permettent d'obtenir encore exactement le $0^{cm^2},1$, ce qui correspond à une amplitude de $0^{cm},01$, exactitude largement suffisante pour la pratique.

ANALYSEUR DE BOUCHEROT (1).

Cet analyseur permet de calculer directement l'amplitude et la phase d'un mouvement harmonique.

Si l'on reprend l'expression générale des coefficients de la série de Fourier

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos n\theta \, d\theta, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin n\theta \, d\theta,$$

on voit que le calcul de ces coefficients revient à la détermination des surfaces

$$\int y \cos n\theta \, d\theta, \quad \int y \sin n\theta \, d\theta.$$

Or il est indifférent de prendre $y \cos n\theta$ ou $y \sin n\theta$ pour ordonnée et $d\theta$ pour base, ou y pour ordonnée et $\cos n\theta \, d\theta$ ou $\sin n\theta \, d\theta$ pour base. Pratiquement, c'est ce dernier procédé qui est le plus simple.

Soit donc M (*fig.* 114) un point quelconque de la courbe, de coordonnées y et θ. Menons par M une droite MA de longueur a faisant avec l'axe des θ l'angle $n\theta$, et par A une droite AM′ de même longueur faisant $n\theta$ avec le même axe.

---

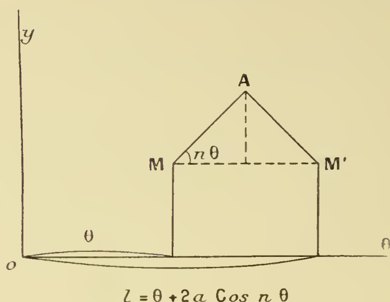
(1) *Lumière électrique*, 12 août 1893.

On obtient un point M′ dont les coordonnées sont

$$y \quad \text{et} \quad l = \theta + 2a\cos n\theta.$$

Les points tels que M′ définissent une courbe C′ dont

Fig. 114



$l = \theta + 2a \operatorname{Cos} n\theta$

l'aire élémentaire a pour expression

$$y\,dl = y[1 - 2an\sin n\theta]\,d\theta.$$

Si alors on fixe la pointe d'un planimètre en M′, il effectuera la mesure de l'aire de la courbe C′, dont la valeur est pour une période

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} y\,d\theta - 2na\int_0^{2\pi} y\sin n\theta\,d\theta.$$

Le terme $\int_0^{2\pi} y\,d\theta$ disparait, si l'on suppose que le premier terme du développement de la série de Fourier est nul, c'est-à-dire si l'ordonnée moyenne de la courbe est nulle.

Pour éviter les surfaces négatives, le planimètre ne faisant pas de distinction entres les surfaces positives et les surfaces négatives, on ajoute à l'ordonnée y une con-

stante K choisie de telle sorte que $y + K$ soit toujours positif.

On a alors, pour une période,

$$\int_0^{2\pi} (y + K)[1 - 2na \sin n\theta]\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} y\, d\theta + \int_0^{2\pi} K\, d\theta - 2naK \int_0^{2\pi} \sin n\theta\, d\theta$$
$$- 2na \int_0^{2\pi} y \sin n\theta\, d\theta,$$

le premier et le troisième terme étant nuls, il reste

$$\mathcal{A} = 2\pi K - 2na \int_0^{2\pi} y \sin n\theta\, d\theta$$

ou

$$(1) \qquad \mathcal{A} = 2\pi K - na C_n \cos \varphi_n.$$

En inclinant la droite MA sur MM′, non plus de $n\theta$ mais de $\frac{\pi}{2} + n\theta$, on aurait pour lieu du point M′ une nouvelle courbe dont l'aire $\mathcal{A}'$ serait

$$\mathcal{A}' = 2\pi K + 2na \int_0^{2\pi} y \cos n\theta\, d\theta$$

ou

$$(2) \qquad \mathcal{A}' = 2\pi K + na C_n \sin \varphi_n.$$

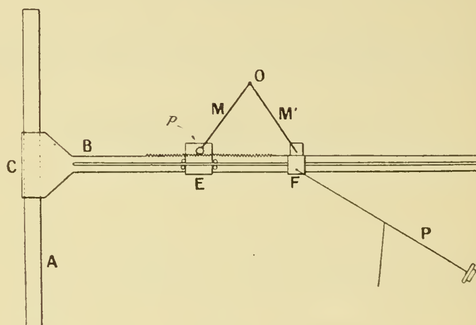
Les égalités (1) et (2) permettent de calculer C_n et φ_n.

Il résulte de ce que nous venons de voir qu'il est aisé de concevoir un appareil réalisant les conditions de la théorie précédente.

L'analyseur de Boucherot (*fig.* 115) est disposé de la façon suivante :

La feuille de dessin sur laquelle est tracée la courbe étant étendue sur une surface plane, on place une règle métallique A parallèlement à Oy. Le long de cette règle peut glisser un chariot C solidaire d'une seconde règle B perpendiculaire à la première, et sur laquelle peuvent se déplacer deux chariots E, F dont l'un (E) porte un pignon p engrenant avec la denture d'une crémaillère taillée sur B.

Fig. 115.



Ce pignon en tournant communique son mouvement à une tige M articulée à son extrémité O avec une seconde tige M' dont le mouvement produit le déplacement du chariot F le long de la règle B.

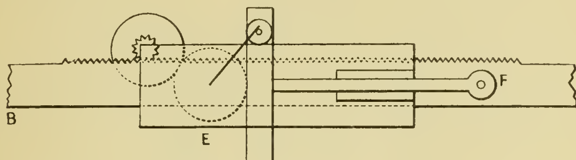
D'après ce que nous savons, si l'on suit avec un traçoir fixé à E la courbe donnée, le point de F ayant même ordonnée et pour abscisse celle du point d'articulation de M' avec F décrit une courbe dont il faut mesurer l'aire. Pour cela il suffit de fixer sur F la pointe d'un planimètre P.

Le pignon p transmet son mouvement à la manivelle M à l'aide d'un train d'engrenages qu'on modifie pour obtenir les différentes valeurs de n.

Les deux chariots E et F peuvent être remplacés par le dispositif de la figure 116 dont le fonctionnement se comprend aisément.

Nous avons supposé que le terme C_0 était égal à zéro, c'est-à-dire que l'ordonnée moyenne de la courbe était nulle. S'il n'en est pas ainsi on déterminera C_0 par une opération planimétrique.

Fig. 116.



Les formules établies précédemment deviennent alors

$$\mathcal{A} = 2\pi(K \pm C_0) - naC_n \cos\varphi_n,$$
$$\mathcal{A}' = 2\pi(K \pm C_0) + naC_n \sin\varphi_n.$$

suivant le signe du terme C_0.

ANALYSEUR DE SHARP (1).

Cet analyseur permet d'obtenir par une seule opération l'amplitude et la phase d'un terme de la série de Fourier, c'est-à-dire C_n et φ_n dans $C_n \sin(n\theta + \varphi_n)$ ou les coefficients A_n et B_n.

Principe de l'appareil. — Supposons que la courbe à analyser soit tracée avec une échelle d'abscisses telle que la période soit égale à 2π.

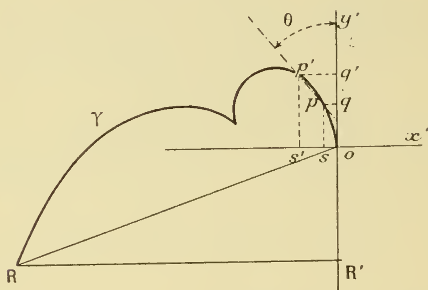
(1) *L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895.

Considérons (*fig.* 118) une roulette à axe horizontal r' dont le plan est constamment parallèle à la direction Oy, et un traceur P, relié à l'axe de cette roulette, avec lequel on suit le contour de la courbe.

Cette roulette peut rouler sur le côté TT′ d'un chariot FF mobile seulement dans la direction Ox.

Si l'on fait subir à l'ensemble un mouvement parallèle à Oy, le développement de la roulette est égal au déplace-

Fig. 117.



ment du style parallèlement à Oy, c'est-à-dire à dy, tandis qu'un mouvement parallèle à Ox ne produit aucun développement.

Supposons maintenant une roulette r ayant même axe que la précédente et appuyée sur un disque horizontal, tournant autour d'un axe vertical d'un angle proportionnel à θ quand le style se déplace parallèlement à Ox, et accompagnant l'ensemble en subissant en même temps des mouvements de translation dans son plan ; il est facile de voir que, par suite de l'adhérence du disque, et de la roulette, le lieu des points de contact de celle-ci, quand le style suit la courbe C (*fig.* 118), sera une courbe γ

(*fig.* 117), dont la tangente en chaque point est la trace du plan de la roulette sur celui du disque et fait l'angle θ avec Oy'.

De plus chaque élément pp' de cette courbe est égal au développement élémentaire de la roulette, c'est-à-dire au déplacement du style parallèlement à Oy, s'il n'y a pas glissement de celle-ci suivant son plan.

Soient alors Ox', Oy', les directions du plan du disque qui au commencement de l'opération sont parallèles aux axes Ox, Oy auxquels est rapportée la courbe donnée C.

A deux points PP' infiniment voisins sur C correspondent sur γ les deux points pp' distants, sur le contour de la courbe, de dy, et l'on a, en projetant sur Ox' et Oy',

$$s's = dx' = dy \sin\theta,$$
$$qq' = dy' = dy \cos\theta.$$

Abaissant du point R de la courbe γ correspondant à la fin de la période une perpendiculaire RR' sur Oy', on a également

$$RR' = \Sigma s's = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, dy,$$
$$OR' = -\Sigma qq' = -\int_0^{2\pi} \cos\theta \, dy$$

et comme

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, dy = -\int_0^{2\pi} y \cos\theta \, d\theta = -\pi A_1,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, dy = \int_0^{2\pi} y \sin\theta \, d\theta = \pi B_1,$$

On en déduit

$$\begin{aligned} RR' &= -\pi A_1, \\ OR' &= -\pi B_1, \\ OR &= \pi\sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \pi C_1, \\ \varphi_1 &= y' OR. \end{aligned}$$

Par conséquent, à un facteur constant près, le segment RR′ représente le coefficient A_1 du terme en $\cos\theta$, OR le coefficient B_1 du terme en $\sin\theta$, OR l'amplitude et y' OR la phase.

En faisant en sorte que, dans l'intervalle d'une période, le disque fasse successivement 1, 2… n tours, on obtient autant de courbes γ, et par suite les différentes valeurs des A_1 B_1 C_1 φ_1, A_2 B_2 C_2 φ_2, ...

Description. — L'appareil est disposé de la façon suivante :

Un chariot F (*fig.* 118), dont la grande dimension est parallèle à yy', repose sur trois roues W et peut se déplacer parallèlement à l'axe des abscisses en roulant sur la feuille de dessin sur laquelle est tracée la courbe C à analyser.

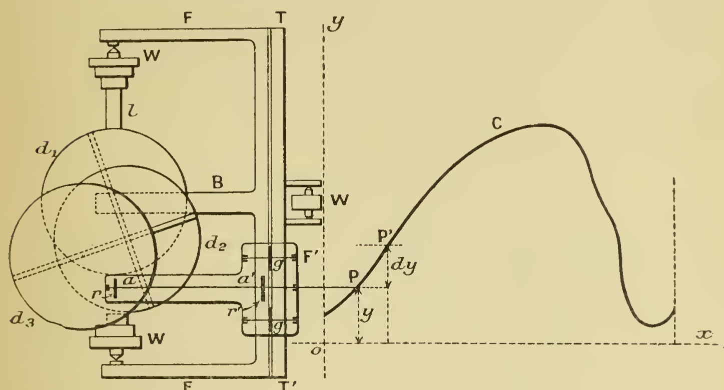
Le long du grand côté TT′ du chariot F peut rouler à l'aide de galets gg un petit chariot F′ portant le style P et un axe aa' parallèle à Ox ; sur cet axe sont montées deux roulettes r, r' de même diamètre dont l'une, r', entraîne la rotation de celui-ci en roulant sur le côté TT′ pendant le déplacement du chariot F′, tandis que l'autre, r, repose sur le disque ainsi qu'il a été dit précédemment.

On pourra donc avec le style P suivre le contour de la courbe C, par suite du double mouvement résultant du

déplacement de F parallèlement à Ox, et de celui de F par rapport à F parallèlement à Oy.

L'appareil comporte trois disques d_1, d_2, d_3. Le disque d_1, dont l'axe est supporté par le bras B du grand côté,

Fig. 118.



reçoit son mouvement de rotation proportionnel au déplacement suivant Ox, c'est-à-dire à θ, à l'aide d'un train d'engrenages actionné par un arbre l supportant les roues W. La face supérieure de ce disque est munie d'un doigt pénétrant dans une rainure tracée sur la face inférieure du disque d_2 et suivant un diamètre.

La face supérieure de d_2 porte une seconde rainure creusée suivant un diamètre perpendiculaire au premier. Dans cette rainure pénètre un doigt fixé à la face inférieure du plateau d_3 sur la face supérieure duquel repose la roulette r. De cette façon le plateau d_3 tourne du même angle que d_1, et en même temps un point quelconque de d_3 peut devenir centre de rotation du point de

contact du plateau et de la roulette, point dont le mouvement élémentaire doit être parallèle à Oy, c'est-à-dire faire l'angle θ avec la direction du plateau primitivement parallèle à Oy.

L'arbre l porte à chaque extrémité des roues (W) dont les diamètres sont dans les rapports $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ En les faisant rouler succcessivement sur des rails plats posés sur la feuille du dessin, on a les différents mouvements $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$ et par suite les moyens de calculer $A_1 B_1 C_1 \varphi_1, A_2 B_2 C_2 \varphi_2, \ldots$

Compteurs harmoniques.

On désigne généralement sous le nom de *compteurs harmoniques* des appareils destinés à effectuer l'opération inverse de celle des analyseurs, c'est-à-dire à donner la somme des termes des différentes harmoniques simples constituant un phénomène, chacune d'elles étant déterminée en amplitude et en phase.

Ces appareils, imaginés par Lord Kelvin, ne sont guère utilisés que pour la prédiction de la hauteur des marées. Ils sont d'un prix élevé et d'une construction compliquée ; nous n'insisterons pas sur leur description.

Dérivateurs.

L'étude des intégrateurs amène logiquement à se demander s'il n'est pas possible de construire des appareils permettant d'effectuer l'opération inverse de l'intégration, c'est-à-dire de déterminer la dérivée d'une fonction donnée par une courbe.

Contrairement à ce qui se passe en analyse, le pro-

blème de la dérivation est beaucoup plus difficile à résoudre mécaniquement que celui de l'intégration; et cela se comprend assez facilement si l'on remarque que le premier revient à tracer une tangente à une courbe, tandis que le second se réduit à la détermination d'une longueur. Or, la détermination de la tangente en un point d'une courbe est en général très imprécise, sauf dans certains cas très particuliers où elle peut se faire par une construction géométrique simple.

Abdank-Abakanowicz signale les difficultés qu'on rencontre alors dans ce cas.

La moindre erreur dans la direction de la tangente peut produire, en effet, une différence considérable dans la grandeur correspondante de l'ordonnée de la courbe différentielle qui présentera par suite un tracé très irrégulier.

Dans l'intégration mécanique, au contraire, un écart dans le parcours de la courbe produit seulement un pivotement de la roulette qui est sans influence appréciable sur la régularité du trait de la courbe intégrale.

Ceci explique les insuccès qu'on a éprouvés chaque fois qu'on a tenté de résoudre le problème de la dérivation mécanique.

Parmi les recherches qui ont été faites dans ce but, il convient de citer celles de M. Mestre, qui a proposé, en 1885, un appareil devant servir à la fois de dérivateur et d'intégrateur [1]; étudié par M. Napoli dans les Ateliers

---

(1) Voir, pour la description de l'appareil projeté par M. Mestre *Les intégraphes et la courbe intégrale*, par Abdank-Abakanowicz. Gauthier-Villars, Paris, 1886.

de construction d'Instruments de précision de la Compagnie de l'Est, il n'a pu donner de résultats satisfaisants.

On peut signaler également des appareils dus à Helle-Shaw, et appelés *différentiateurs*, qui servent en réalité à comparer entre elles deux vitesses uniformes dont l'une est connue.

Nous n'insisterons pas sur la description de ces appareils.

CHAPITRE V.

INTÉGRATEURS COMPOSÉS.

Généralités.

On désigne généralement sous le nom d'*intégrateurs composés* une catégorie d'appareils destinés à déterminer l'intégrale d'une équation différentielle. Le problème ainsi posé n'a reçu que des solutions particulières, et, étant donnée la diversité des types d'équation qu'on peut rencontrer, il semble difficile de réaliser pratiquement des appareils capables de résoudre la question dans le cas le plus général.

Néanmoins, Lord Kelvin a fait à la Société royale de Londres une Communication dans laquelle il a exposé une méthode pour intégrer des équations de forme quelconque, en utilisant le principe disque, sphère et cylindre, déjà appliqué à la construction des analyseurs harmoniques.

En réalité, ces appareils ne sont pas entrés dans la pratique.

Amsler, dans ses recherches sur l'intégration mécanique, avait envisagé la question des intégrateurs composés; il a donné un appareil répondant à un cas particulier, que nous allons décrire avant d'indiquer deux méthodes qui ont fait l'objet de Communications à l'Académie des Sciences.

Appareils d'Amsler.

Ces appareils sont destinés à évaluer les intégrales de la forme

$$\int y^n x^m \, dx, \tag{1}$$

y étant considérée comme une fonction de x; on fait un changement de variable en posant

$$dz = x^m \, dx.$$

Dans le cas particulier où $n = 2$, $m = 1$, l'intégrale (1) prend la forme

$$\int y^2 x \, dx$$

On peut l'évaluer de la façon suivante :

Posant

$$y = 2a \sin \alpha,$$

on a successivement

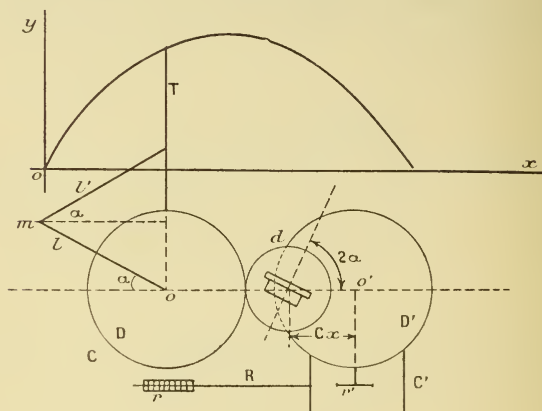
$$y^2 = 4a^2 \sin^2 \alpha = 2a^2 - 2a^2 \cos 2\alpha,$$

$$\int y^2 x \, dx = 2a^2 \int x \, dx - 2a^2 \int x \cos 2\alpha \, dx.$$

Le long d'une courbe fermée, $\int x\,dx = 0$; il reste donc à calculer mécaniquement $\int x \cos 2\alpha\,dx$.

L'appareil d'Amsler, établi dans ce but, comprend essentiellement deux chariots C, C' pouvant se déplacer

Fig. 119.



parallèlement à Ox, en roulant dans la rainure d'une règle métallique comme dans beaucoup d'appareils précédemment décrits.

Le chariot C porte une tige T, terminée par un style et pouvant se déplacer parallèlement à Oy. Un disque D, disposé sur ce chariot, est solidaire d'une tige l articulée en m avec une seconde tige l' de même longueur reliée à T; ce disque engrène avec une roue d de diamètre moitié moindre et munie en son centre d'une roulette intégrante. L'ensemble est disposé de façon que l'axe de cette roulette fasse avec Ox un angle $= 2\alpha$ quand les deux tiges l, l' font avec ce même axe l'angle α.

Le chariot C′ porte un disque D′ sur lequel repose la roulette intégrante de la roue d. Il peut être mis en mouvement par une crémaillère R en prise avec une roue dentée r qui se déplace en même temps que C, en roulant sur une crémaillère fixe parallèle à Ox.

Le disque D′ reçoit en outre un mouvement de rotation par l'intermédiaire d'une roue r' qui lui communique une rotation proportionnelle à x, à l'aide d'un train d'engrenages.

Supposons que le point de contact de la roulette et du disque D′ soit au centre de ce dernier quand le style de la tige T est sur l'axe des x.

Quand le style sera sur un point de la courbe d'abscisse x, la distance du point de contact au centre O′ sera Cx (C constante), et si l'on déplace alors le style de dx, le disque D′ tournant d'un angle proportionnel à dx, le point de contact de la roulette décrit $Cx\,dx$. Le développement de cette dernière, projection de $Cx\,dx$ sur son plan, sera par suite

$$Cx\,dx\cos 2\alpha,$$

auquel il faut ajouter le développement résultant du mouvement relatif du disque et de la roulette, c'est-à-dire

$$C\int \sin 2\alpha\,dx.$$

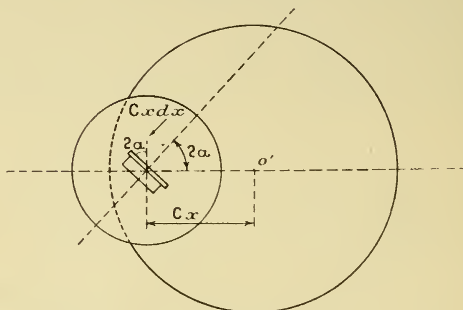
Le déplacement du style suivant Oy ne produit pas de rotation de la roulette, puisque, du fait de ce mouvement, elle pivote autour de son point de contact.

La rotation de la roulette est donc au total

$$\omega = C\left(\int x\cos 2\alpha\,dx + \int \sin 2\alpha\,dx\right).$$

On peut obtenir directement l'intégrale $\int \sin 2\alpha\, dx$ par l'un des dispositifs décrits antérieurement. La valeur

Fig. 120.



de l'intégrale $\int x \cos 2\alpha\, dx$ est par suite complètement déterminée.

Méthode de M. Pétrovitch.

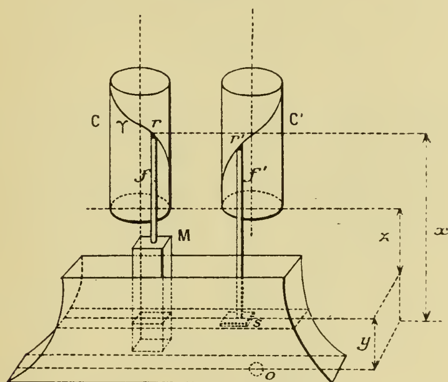
L'appareil suivant, présenté par M. Pétrovitch à l'Académie des Sciences [1], fournit un procédé d'intégration graphique de certaines équations différentielles.

Soient C, C' deux cylindres verticaux de même diamètre, tournant par l'action d'un mécanisme d'horlogerie avec une vitesse uniforme autour de leurs axes. Ces deux cylindres sont placés au-dessus d'un vase B, formé de deux faces planes parallèles au plan de la figure, de deux autres faces cylindriques perpendiculaires à ce plan et

[1] Communication de M. Michel Pétrovitch, présentée à l'Académie des Sciences par M. Appell, séance du 17 mai 1897.

d'une face inférieure plane horizontale. Ce vase contient du mercure qui peut s'écouler par un orifice O pratiqué dans la face inférieure. Le long des cylindres C et C' peuvent se déplacer verticalement deux tiges f, f' portant à leur partie supérieure deux styles r, r' et à leur partie inférieure, la tige f un corps M de forme prismatique, la tige f' un flotteur s.

Fig. 121.



On conçoit que la forme du corps M, celle du vase B et la largeur de l'orifice étant fixées, la loi de variation de la hauteur du niveau avec le temps dépende de la façon dont on immerge le corps M, c'est-à-dire de la loi de déplacement de la tige f pendant ce même temps.

Cette loi pourra être représentée, par exemple, par une courbe γ tracée sur le cylindre C, les temps étant comptés sur la périphérie de la base du cylindre, les déplacements suivant les génératrices, à partir du plan inférieur du vase.

Désignons alors par a l'aire de la section horizontale

du corps M, par z la distance de la base du cylindre C au plan du niveau du mercure, y celle de ce même plan à la face inférieure du vase, $\Phi(y)$ l'aire de la section horizontale du vase au niveau y, et x la distance du style r à la face inférieure.

Assujettissons la pointe r à se trouver constamment sur γ, et prenons pour unité de longueur celle de l'arc parcouru par un point quelconque du cylindre dans l'unité de temps; on aura à chaque instant

$$x = f(t).$$

Si, pendant le temps dt, nous immergeons le corps M, en faisant descendre la tige f de dx, la tige f' va monter de dy, et par l'orifice O s'écoule une quantité de mercure égale à $\mu\Omega\sqrt{2gy}\,dt$ (Ω étant l'aire de l'orifice, et μ le coefficient de contraction du mercure).

Or, la quantité de liquide qui s'est élevée au-dessus du niveau y est égale à la différence entre la quantité déplacée par le corps M, quand celui-ci sera immergé de dx, et celle qui s'est écoulée par l'orifice.

On a donc

$$[\Phi(y) - a]\,dy = a\,dz - \lambda\sqrt{y}\,dt,$$

en posant

$$\lambda = \mu\Omega\sqrt{2g}.$$

Mais

$$z = x - y,$$
$$dz = dx - dy,$$

d'où

$$[\Phi(y) - a]\,dy = a(dx - dy) - \lambda\sqrt{y}\,dt.$$

L'équation différentielle du problème est donc

$$\Phi(y)\frac{dy}{dt} + \lambda\sqrt{y} - af'(t) = 0. \qquad (1)$$

L'intégrale $y = \varphi(t)$, qui pour $t = 0$ prend la valeur $y = H$, hauteur initiale du mercure, représente la loi de variation de cette hauteur avec le temps ; l'extrémité r' de la tige f' tracera donc cette intégrale sur le cylindre C'.

On a ainsi l'intégration graphique de toutes les équations de la forme (1).

On peut d'ailleurs faire varier $\Phi(y)$, a, $f(t)$, c'est-à-dire la forme du vase, celle du corps M et la loi de déplacement de ce dernier ; la section Ω de l'orifice pourra également être une fonction du temps. Il sera dès lors possible, en disposant de ces coefficients, d'identifier l'équation (1) avec un nombre assez considérable de types d'équations différentielles.

En particulier, si

$$\Phi(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y}},$$

l'équation (1) prend la forme d'une équation de Riccati

$$\frac{du}{dt} = \chi(t) - \lambda u^2.$$

Cet appareil donne lieu pratiquement à certaines difficultés de réalisation, en particulier pour la construction du récipient dont les faces cylindriques ont une section dépendant de la forme de la fonction $\Phi(y)$. De plus, il se produit des effets de capillarité qui sont de nature à altérer les résultats.

Intégrateur à lame coupante de M. l'ingénieur Jacob.

Le principe de la lame coupante, déjà utilisé dans la construction du planimètre de Prytz, permet d'effectuer l'intégration numérique d'un certain nombre d'équations linéaires. Dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences ([1]), M. Jacob, ingénieur général d'Artillerie navale, a montré comment on pouvait en particulier, à l'aide de ce procédé, intégrer l'équation de Riccati et celle d'Abel.

Ces dernières sont de la forme

$$yy' = Ay^2 + By + C.$$

On peut d'ailleurs ramener à ce type les suivantes :

$$y'(\alpha y + \beta) = Ay^2 + By + C,$$
$$y' = (\alpha y + \beta)(Ay^2 + By + C),$$

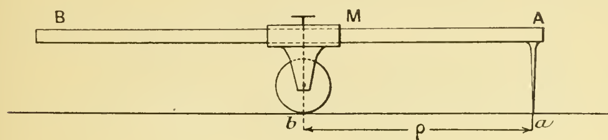
dans lesquelles α, β, A, B, C sont des fonctions de la variable données algébriquement, ou simplement par leurs valeurs numériques.

La partie essentielle de l'appareil est une tige horizontale AB (*fig.* 122), portant à son extrémité A une pointe verticale Aa; le long de la partie AB peut coulisser un manchon M auquel est fixée la lame coupante, ou mieux une roulette à bords tranchants, dont l'usure est moins rapide. Ce manchon peut être fixé en un point de la tige AB à l'aide d'une vis de pression.

([1]) Note de M. Jacob, présentée à l'Académie des Sciences par M. Maurice Lévy, séance du 29 avril 1907.

La distance $ab = \rho$ est la base de l'appareil. Pour l'intégration de l'équation de Riccati, le manchon est fixe et ab est constant; pour l'intégration de l'équation d'Abel, le manchon est mobile et $ab = \rho$ varie d'après une loi que détermine une coulisse-guide de forme convenable.

Fig. 122.



L'appareil étant placé sur une feuille de dessin et la lame coupante ayant mordu dans le papier, si avec la pointe a on suit une courbe D (directrice), la droite ab enveloppe une courbe E à laquelle elle est tangente en b.

Soient x, y les coordonnées du point a sur la directrice rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires; x_1, y_1, celles du point b sur la courbe enveloppe E; ω, l'angle de la base avec l'axe des x (*fig.* 123).

On a

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_1 + \rho \cos\omega, \\ y = y_1 + \rho \sin\omega, \end{cases}$$

avec

$$(2) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}.$$

Différentiant (1) il vient, en tenant compte de (2),

$$dx = dx_1 - \rho \sin\omega \, d\omega + d\rho \cos\omega,$$

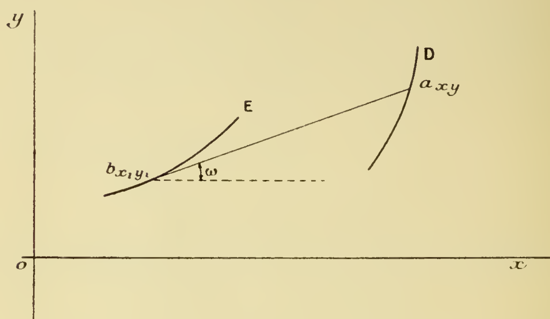
$$dy = dy_1 + \rho \cos\omega \, d\omega + d\rho \sin\omega,$$

$$(3) \qquad \rho \, d\omega + dx \sin\omega - dy \cos\omega = 0.$$

Si l'on exprime les coordonnées x, y de la directrice en fonction d'une même variable t, l'équation (3) devient

$$\rho \frac{d\omega}{dt} + x'_t \sin\omega - y'_t \cos\omega = 0.$$

Fig. 123.



Posons

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = u;$$

on a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\frac{du}{dt}}{1+u^2}, \qquad \cos\omega = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin\omega = \frac{2u}{1+u^2},$$

d'où

(4) $$2\rho\frac{du}{dt} - y'_t(1-u^2) + 2ux'_t = 0.$$

Si ρ est constant, (4) est une équation de Riccati.

Si $\rho = lu$, l étant une constante, c'est une équation d'Abel.

En mesurant l'angle ω, on connaîtra la valeur numérique $u = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$ de l'intégrale de (4).

Supposons qu'on se donne la valeur initiale t_0, et la valeur u_0 de la fonction u. On connaît par suite le point x_0, y_0 de la directrice et l'angle de la base avec Ox ; pour calculer l'intégrale, on place la pointe a au point ainsi déterminé et l'on donne à la tige AB l'inclinaison voulue ; on suit alors la directrice dans le sens convenable et l'on mesure ω correspondant aux valeurs de t pour lesquelles on veut connaître u.

Si une équation de Riccati ou d'Abel est donnée sous sa forme générale, on commence par réduire l'équation de Riccati à l'une des formes

$$u' = A u^2 + B u \mp A,$$

par la substitution $y = \lambda u$, et l'équation d'Abel à la forme

$$uu' = A u^2 + B u - A,$$

par la même substitution ; dans ce dernier cas, λ est déterminé par une équation linéaire introduisant une constante dont on peut disposer suivant les conditions du problème.

Pour déterminer la directrice, on identifie l'équation réduite avec (4) ; on a alors deux relations donnant l'expression des coordonnées x et y, et l'on construit la courbe à l'aide de quadratures.

Si l'équation de Riccati se ramenait à la forme

$$u' = A u^2 + B u + A,$$

dans un intervalle donné, on la comparerait à celle qui donne l'angle de la base avec la tangente à la directrice.

Cet intégromètre permet de résoudre numériquement

les questions qu'on rencontre en Artillerie, principalement dans les problèmes de balistique intérieure et extérieure et dans l'étude du développement des pressions d'un explosif agissant comme torpille.

Il permet également d'effectuer l'intégration de l'hodographe ; il a été construit, pour la Commission d'expériences de Gâvre, un appareil basé sur ce principe et destiné à déterminer le mouvement d'un point dans un milieu résistant.

ERRATUM.

Page 3, ligne 3 en remontant, *au lieu de* la valeur numérique d'une relation différentielle, *lisez* la valeur numérique de l'intégrale d'une relation différentielle.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II.

LES INTÉGROMÈTRES.

CHAPITRE III.

LES INTÉGRAPHES.

Courbes différentielles et courbes intégrales.

Intégraphes.

CHAPITRE IV.

L'ANALYSE HARMONIQUE ET LES ANALYSEURS.

1° *Généralités.*

2° *Analyseurs.*

CHAPITRE V.

INTÉGRATEURS COMPOSÉS.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INDEX ALPHABÉTIQUE.

Nota. — Les numéros se rapportent aux pages où figurent les noms et les appareils désignés dans l'Index.

50271 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS quai des Grands-Augustins, 55.

Date Due

L. B. CAT. NO. 1137

